



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
TESE DE DOUTORADO



Existência de solução e comportamento assintótico de alguns modelos dissipativos envolvendo o operador monótono p -Laplaciano

ADRIANO PEDREIRA CATTAI

SALVADOR, BA

2021

ADRIANO PEDREIRA CATTAI

**Existência de solução e comportamento assintótico de alguns
modelos dissipativos envolvendo o operador monótono
 p -Laplaciano**

Tese de doutorado apresentada ao Colegiado do
Curso de Doutorado em Matemática da Universi-
dade Federal da Bahia, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do grau de Doutor em Ma-
temática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Orientador: Carlos Alberto Raposo da Cunha

SALVADOR, BA

2021

ADRIANO PEDREIRA CATTAI

**Existência de solução e comportamento assintótico de alguns
modelos dissipativos envolvendo o operador monótono
 p -Laplaciano**

Tese de doutorado apresentada ao colegiado do curso
de Doutorado em Matemática da Universidade Federal
da Bahia, como parte dos requisitos necessários à
obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Aprovada em 11/12/2021 e assinada pela seguinte comissão examinadora:



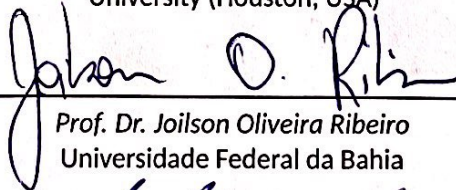
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Universidade Federal de São João del-Rei e
Programa de Pós-Graduação em Matemática,
Universidade Federal da Bahia [Orientador]



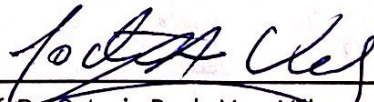
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Universidade do Estado do Pará



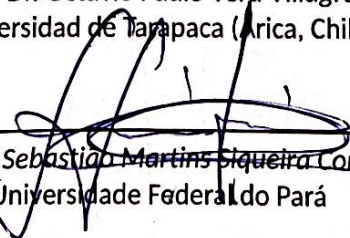
Prof. Dr. Huy Hoang Nguyen
AccentCare (Dallas, USA), University of Texas at
Austin (Austin, USA) and North American
University (Houston, USA)



Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro
Universidade Federal da Bahia



Prof. Dr. Octavio Paulo Vera Villagran
Universidad de Tarapaca (Arica, Chile)



Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Universidade Federal do Pará

SALVADOR, BA

2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda
Sistema Universitário de Bibliotecas da Universidade Federal da Bahia (SIBI/UFBA)

C368 Cattai, Adriano Pedreira
Existência de solução e comportamento assintótico de alguns modelos dissipativos envolvendo o operador monótono p -Laplaciano / ADRIANO PEDREIRA CATTAL. – Salvador, 2021.
92 f.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística, 2021.

1. Termo-elasticidade. 2. p -Laplaciano. 3. Existência de solução. 4. Comportamento assintótico. I. Cunha, Carlos Alberto Raposo da. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU 517.95

In Memoriam

Ailton Teles Cattai

★ 1937 — † 2016

*meu pai, que com seus conselhos e com seu exemplo nos
ensinou que a honestidade, a honra e a dignidade são imprescindíveis.*

Agradecimentos

Tenho muito o que agradecer e para muitas pessoas. Primeiramente à Deus por estar sempre comigo, iluminando a minha vida, sempre me protegendo, me dando força e abrindo todas as portas.

À minha família, que tanto amo: minha esposa Tharita e meus filhos, Gabriela e Antônio, pela compreensão em ceder grande parte do nosso tempo a esses anos de muita dedicação no doutorado; à minha mãe, Maria do Carmo, pelas muitas orações, pedindo a Deus por mais esta graça e por ter feito tudo por mim e por meu irmão, Alessandro (Leo); ao meu irmão e grande parceiro, por nunca medir esforços para o meu sucesso.

Ao meu orientador, Professor Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha. Fui agraciado com sua valiosa orientação, sua dedicação, sua confiança, pela grande oportunidade de aprendizagem que transcendeu a Matemática e, principalmente, pela sua amizade. Você é um grande exemplo.

À UFBA, pelo seu corpo docente, direção e administração, em especial à equipe do CEAD/IME. Aos meus professores no doutorado: Augusto Armando, Diego Catalano, Ézio Costa, Joilson Ribeiro, Kleyber Mota, Tertuliano Franco, Thiago Bomfim e Vitor Araujo, pelos valiosos conhecimentos matemáticos, seja ao longo das disciplinas ou em conversas informais e pelo encorajamento. Aos professores e amigos do Departamento de Matemática: Edson Coayla, Evandro Carlos, Hale Aytac, Isaac Costa, Jaime Chamorro, José Nelson B. Barsosa, Juan Andrés, Juan Pablo, Leandro Suguitani, Manuela Souza, Marco Antônio, Oscar Ocampo e Paulo Varandas, pelo incentivo, amizade e diversas orientações. A todos os colegas de doutorado, em especial, Carlos (Rasta) Alberto Nonato, Darlan Ferreira, Diego Daltro, Diogo Dorea, Fabrício Santos e Vinícius Coelho.

À UNEB pela liberação e confiança. Aos colegas Antônio Teófilo, Armando Peixoto, Eurico Sales e Marcelo Ávila pelo incentivo e apoio.

Aos membros da banca, que me honraram com suas presenças, pelo tempo e atenção dispensados à leitura e correção; pelos enriquecedores comentários aprimorando ainda mais esse trabalho; e especialmente na ajuda intelectual, contribuindo nos resultados obtidos e publicados em revistas científicas.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito, muito, obrigado, mesmo que não estejam citados aqui.

À FAPESB e à CAPES pelo apoio financeiro.

“A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo.”

Nelson Mandela

★ 1918 — † 2013

Resumo

Estudamos a existência de solução e o comportamento assintótico para quatro modelos específicos: equação de ondas com memória; sistema acoplado de equações de ondas; sistema acoplado de equação de onda com a equação do calor (sistema termo-elástico) e sistema termo-elástico com fonte externa. Analisamos estes problemas sujeitos a interferência do operador monótono p -Laplaciano. Nossa abordagem apresenta os aspectos recentes no tratamento destes modelos, no âmbito de Equações Diferenciais Parciais. Neste sentido, destacamos o nosso modelo termo-elástico com p -Laplaciano. De acordo com o nosso conhecimento, esse modelo foi apresentado pela primeira vez na literatura justamente nesta tese. Para a existência de solução, utilizamos o Método de Faedo-Galerkin. Para a análise do comportamento assintótico, empregamos as distintas e recentes técnicas: na análise de estabilidade de solução foi utilizado o Teorema de M. Nakao e H. Kuwahara (1987), e também, o Teorema de P. Martinez (1999), baseado em uma nova desigualdade que generaliza os resultados prévios de A. Haraux (1985) e M. Nakao (1978); para a análise de explosão da solução em tempo finito utilizamos o Lema de Y. Qin e J. Rivera (2004).

Palavras-chave:

Termo-elasticidade • p -Laplaciano • Existência de solução • Comportamento assintótico

Abstract

We study the existence of solution and the asymptotic behavior for four specific models: wave equation with memory; coupled system of wave equations; coupled system of wave equation with heat equation (thermo-elastic system) and thermo-elastic system with external source. We analyze these problems under the interference of the monotono p -Laplacian operator. Our approach presents the recent aspects in the treatment of these models, in the scope of Partial Differential Equations. In this sense, we highlight our thermo-elastic model with p -Laplacian, as far as we know, it was presented for the first time in the literature precisely in this thesis. For the existence of a solution we use the Faedo-Galerkin Method. For the analysis of the asymptotic behavior we used different and recent techniques: in the stability analysis, the Theorem of M. Nakao and H. Kuwahara (1987) was used, and also the Theorem of P. Martinez (1999), based on a new inequality that generalizes the previous results of A. Haraux (1985) and M. Nakao (1978); for the finite time “Blow-up” analysis we used the Lemma de Y. Qin and J. Rivera (2004).

Keywords:

Thermoelasticity • p -Laplacian • Existence of solution • Asymptotic behavior

Sumário

APRESENTAÇÃO		1
1	BREVE APRESENTAÇÃO DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV	5
1.1	Notação Básica	6
1.2	Topologias Fraca e Fraca Estrela	7
1.3	Espaços de Lebesgue	8
1.4	Espaço das Distribuições	9
1.4.1	Derivada de Distribuições	12
1.5	Espaços de Sobolev	13
1.5.1	Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$	14
1.5.2	Teoremas de Compacidade	17
1.6	Os Espaços $L^p(0, T; X)$	18
1.7	O Prolongamento de Soluções	19
1.8	Método de Faedo-Galerkin	20
1.9	O Operador Pseudo Laplaciano	21
1.9.1	Derivada de Gateaux	22
1.9.2	O Problema Estacionário	26
1.10	O Teorema do Passo da Montanha	27
2	SOLUÇÃO GLOBAL E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UMA EQUAÇÃO DE ONDA TIPO p -LAPLACIANO COM MEMÓRIA	31
2.1	Introdução	32
2.2	O Poço Potencial	33
2.3	Preliminares	34
2.4	Base de Galerkin	36
2.5	Solução Global	37
2.5.1	Existência	37
2.5.2	Unicidade	40
2.6	Comportamento Assintótico	42
3	SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDAS TIPO p -LAPLACIANO	45
3.1	Introdução	46
3.2	Existência de Solução	48
3.3	Comportamento Assintótico	52
4	SOLUÇÃO GLOBAL PARA UM SISTEMA TERMO-ELÁSTICO COM p -LAPLACIANO	57

4.1	Introdução	58
4.2	O Poço Potencial	59
4.3	Solução Global	60
5	SOLUÇÃO GLOBAL E “BLOW-UP” PARA UM SISTEMA TERMOELÁSTICO TIPO p - LAPLACIANO SOB AMORTECIMENTO FRACO E FONTE LOGARÍTMICA	65
5.1	Introdução	66
5.2	Preliminares	67
5.3	O Poço Potencial	69
5.4	Base de Galerkin	71
5.5	Solução Global	72
5.6	Decaimento Polinomial para $E(0) < d$	76
5.7	Blow-up em tempo finito	78
	REFERÊNCIAS	81

Apresentação

Apresentamos importantes e recentes resultados sobre a equação de ondas, sistemas acoplados e sistemas termo-elásticos sujeitos a interferência do operador monótono p -Laplaciano, também conhecido como *operador pseudo Laplaciano*. O operador p -Laplaciano aplica $W_0^{1,p}(\Omega)$ no seu dual $W^{-1,q}(\Omega)$, é definido por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad \text{ou} \quad \Delta_p u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad p > 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

As formas desse operador correspondem às derivadas de Fréchet, em $W_0^{1,p}$, do funcional

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \quad \text{ou} \quad J(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \, dx.$$

O p -Laplaciano é um operador não linear que se reduz ao Laplaciano usual quando $p = 2$. Ele é de grande interesse teórico por ser protótipo para o estudo de diversas equações envolvendo, por exemplo, operadores monótonos e hemicontínuos, conforme detalhado por [LIONS \(1969\)](#) e [Cavalcanti e Cavalcanti \(2010\)](#). Na Física, ele está presente em diversos temas, por exemplo: nos efeitos eletromagnéticos em supercondutores a altas temperaturas; na mecânica não Newtoniana e em sistemas de quimiotaxia de atração repulsão, vide os trabalhos de [Choi, Kim e Laforest \(2018\)](#); [ABDULLA e JELI \(2017\)](#) e [Li \(2020\)](#).

Muitos estudos sobre equação de onda e sistema termo-elástico vêm sendo apresentados nos últimos anos. No nosso contexto iremos fazer uso da Teoria do Poço Potencial, que é uma poderosa ferramenta no estudo da existência global de soluções para EDPs. Intuitivamente, podemos associar a um vale rodeado por todos os lados por terrenos mais altos e que, portanto, pode ser preenchido com água formando um lago, sem qualquer água fluindo para um outro mínimo mais baixo, por exemplo, o nível do mar. Essa teoria está diretamente ligada a variedade de Nehari e depende essencialmente do Teorema do Passo da Montanha, devido à [Ambrosetti e Rabinowitz \(1973\)](#). Resumidamente, ela parte do princípio em que a energia é a soma entre as energias cinética e potencial. Da ideia de [Ye \(2007\)](#), motivado por [Payne e Sattinger \(1975\)](#), pode-se construir um conjunto de estabilidade, que tenha um vale ou um “poço” de profundidade d criado na energia potencial. Se $d > 0$, para soluções com valores iniciais na “parte boa” do poço, a energia potencial da solução nunca escapa do poço. Em geral, é possível que a energia do termo da fonte cause blow-up em tempo finito, porém na parte boa do poço ela permanece limitada. A energia total da solução permanece finita em qualquer intervalo de tempo $[0, T)$, que fornece a existência global da solução.

Zeev Nehari, em seus dois trabalhos [Nehari \(1960\)](#) e [Nehari \(1961\)](#), introduziu um método que é muito interessante na teoria do ponto crítico, e passou a levar seu nome, o *Método de Nehari*. Ele considerou um problema de valor limite para uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem num intervalo aberto e mostrou que ela tem uma solução não trivial, que pode ser obtida por minimização restrita do funcional de Euler-Lagrange correspondente ao problema. Num contexto amplo, suponha que E é um espaço de Banach e $F \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. A derivada de Fréchet de F em $u \in E$, $F'(u)$, é um elemento do espaço dual E' , e denotamos $F'(u)$ avaliada em $v \in E$ por $F'(u)v$. Se $u \in E$ é um ponto crítico de F , então $F'(u) = 0$, ou seja, $F'(u)v = 0$, para todo $v \in E$, em particular $F'(u)u = 0$. Assim, definimos o conjunto o qual contém todos os pontos críticos de F :

$$\mathcal{N} := \{u \in E \setminus \{0\}; F'(u)u = 0\},$$

que é chamado de *Variedade de Nehari*, mesmo que em geral, não seja uma variedade. Como todo $u \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico de F , podemos considerar o problema de procurar nele pontos de mínimos para diversos problemas. Vemos então, que o método de Nehari minimiza o funcional F sobre a variedade de Nehari, ou seja, determinar $u \in \mathcal{N}$ tal que $F(u) = \inf_{v \in \mathcal{N}} F(v)$. Para maiores detalhes e um maior aprofundamento consultar [Szulkin e Weth \(2010\)](#).

Para a análise do comportamento assintótico, análise de estabilidade desolução, foi utilizado o Teorema de M. Nakao e H. Kuwahara (1987) e, também, o Teorema de P. Martinez (1999), baseado em uma nova desigualdade que generaliza os resultados prévios de A. Haraux (1985) e M. Nakao (1978).

O ambiente natural para provar a existência de soluções de Equações Diferenciais Parciais são os Espaços de Sobolev, cuja referência bibliográfica considerada é [ADAMS e FOURNIER \(2003\)](#). Provaremos a existência de soluções pelo conhecido método de Faedo-Galerkin, que consiste em obter a solução de um problema através de soluções aproximadas. A descrição desse método está na seção [1.8 Método de Faedo-Galerkin](#).

A seguir, apresentamos a estrutura do nosso trabalho.

Estrutura do Trabalho

Estudamos a existência global e o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais parciais do tipo p -Laplaciano, especificamente para uma equação de onda com memória; um sistema acoplado de equações de onda; um sistema termo-elástico e um sistema termo-elástico com fonte logarítmica, cujos resultados estão, respectivamente, nos capítulos [2](#), [3](#), [4](#), e [5](#). Nesses capítulos, para facilitar a leitura, optamos por apresentar o texto em detalhes, portanto, alguns conceitos estarão descritos independentes de previamente introduzidos no texto tese. Nosso trabalho está, assim, organizado:

1 Breve Apresentação dos Espaços de Sobolev: capítulo de caráter preparatório. Estabelecemos a notação utilizada em todo texto e delineamos, sem nenhuma prova, resultados importantes que serão necessários no desenvolvimento do nosso trabalho. Esse capítulo é dispensável para um leitor que se encontra acostumado com a notação usual da área.

2 Solução Global e Comportamento Assintótico para uma Equação de Onda tipo p -Laplaciano com Memória: estudamos a solução global, unicidade e comportamento assintótico da equação não linear

$$u_{tt} - \Delta_p u = \Delta u - g * \Delta u$$

em que $\Delta_p u$ é o operador não linear p -Laplaciano, $p \geq 2$, e $g * \Delta u$ é um amortecimento de memória. A solução global é construída por meio das aproximações de Faedo-Galerkin levando em consideração que os dados iniciais estão em um conjunto apropriado de estabilidade criado a partir da variedade de Nehari; o comportamento assintótico é obtido usando um resultado de Martinez (1999) baseado em uma nova desigualdade que generaliza os resultados de Haraux e Nakao.

3 Sistema acoplado de equações de ondas tipo p -Laplaciano: estudamos a existência de solução e o comportamento assintótico para um sistema acoplado não linear de equações de onda do tipo p -Laplaciano dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta_p u + |u|^{r-1} u |v|^{r+1} - \Delta u' &= 0 & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ v'' - \Delta_p v + |v|^{r-1} v |u|^{r+1} - \Delta v' &= 0 & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ (u(x, 0), v(x, 0)) &= (u_0(x), v_0(x)) & \text{em } \Omega, \\ (u'(x, 0), v'(x, 0)) &= (u_1(x), v_1(x)) & \text{em } \Omega, \\ u(x, t) = v(x, t) &= 0 & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \end{array} \right.$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira suficientemente suave Γ . A existência da solução é feita usando as aproximações de Faedo-Gallerkin. Provamos a estabilidade exponencial quando $p = 2$ e decaimento polinomial se $p > 2$ baseado em Nakao (1978), NAKAO e KUWAHARA (1987).

4 Solução Global para um Sistema Termo-elástico com p -Laplaciano: provamos a solução global do sistema não linear

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta_p u + \theta &= |u|^{r-1} u \\ \theta_t - \Delta \theta &= u_t \end{array} \right.$$

em que Δ_p é o operador não linear p -Laplaciano, $2 \leq p < \infty$. Aplicamos a teoria do poço potencial. A solução global é construída por meio das aproximações de Faedo-Galerkin, levando em consideração que os dados iniciais estão em um conjunto apropriado de estabilidade criado a partir da variedade de Nehari.

5 Solução global e “blow-up” para um sistema termoelástico tipo p -Laplaciano sob amortecimento fraco e fonte logarítmica: estudamos a solução global, estabilidade polinomial e comporta-

mento de explosão em tempo finito para o sistema não linear

$$\begin{cases} u'' - \Delta_p u + \theta + \alpha u' &= |u|^{p-2} u \ln |u| \\ \theta' - \Delta \theta &= u' \end{cases}$$

em que Δ_p é o operador não linear p -Laplaciano, $2 \leq p < \infty$. Levando em consideração que os dados iniciais estão em um conjunto de estabilidade adequado criado a partir da variedade de Nehari, a solução global é construída por meio das aproximações de Faedo-Galerkin e o decaimento polinomial é comprovado. O comportamento da explosão da solução em tempo finito é provado em um conjunto de instabilidade com valores de energia negativos.

Breve Apresentação dos Espaços de Sobolev

Este primeiro capítulo tem carácter preparatório. Estabeleceremos a notação utilizada em todo texto e delinearemos, sem nenhuma prova, resultados importantes que serão necessários no desenvolvimento do nosso trabalho. Introduziremos os conceitos de Distribuição e Espaços de Sobolev, com base nos quais define-se uma solução fraca de uma equação diferencial parcial. Apresentamos o método de Faedo-Galerkin o qual será utilizado para obtenção da existência e unicidade de soluções. Para um leitor familiarizado com o conteúdo, uma leitura superficial para definir a notação e revisar os principais resultados provavelmente será suficiente. Está assim dividido:

- 1.1 Notação Básica;
- 1.2 Topologias Fraca e Fraca Estrela;
- 1.3 Espaços de Lebesgue;
- 1.4 Espaço das Distribuições;
- 1.5 Espaços de Sobolev;
- 1.6 Os Espaços $L^p(0, T; X)$;
- 1.7 O Prolongamento de Soluções;
- 1.8 Método de Faedo-Galerkin;
- 1.9 O Operador Pseudo Laplaciano;
- 1.10 O Teorema do Passo da Montanha.

Os conteúdos deste primeiro capítulo podem ser completados com os textos [ADAMS e FOURNIER \(2003\)](#), [BREZIS \(2010\)](#), [Cavalcanti e Cavalcanti \(2010\)](#), [Hale \(1997\)](#), [KESAVAN \(1989\)](#), [LIONS \(1969\)](#), [MEDEIROS e MIRANDA \(2019\)](#), [SCHWARTZ \(1966\)](#), [Ó \(2004\)](#), [RIVERA \(2004\)](#), [YOSIDA \(1974\)](#).

1.1 Notação Básica

Um conjunto aberto não vazio no espaço Euclidiano real n -dimensional $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, será sempre representado por Ω , com fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma$. Denotamos $\overline{\Omega}$ como o fecho de Ω em $\mathbb{R}^n$ e $K \subseteq \Omega$ se K for um subconjunto compacto de Ω . Um ponto gerérico em $\mathbb{R}^n$ será denotado por $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ cuja norma euclidiana é dada por $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ e o produto interno, de dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$, por $\langle x, y \rangle$. A distância entre dois pontos x e y é $\text{dist}(x, y) = |x - y|$ e, entre x e Ω é $\text{dist}(x, \Omega) = \inf\{|x - y|, y \in \Omega\}$. A bola aberta de centro x_0 e raio $r \geq 0$ é $B(x_0, r) = \{x; |x - x_0| < r\}$ e a fechada é $\overline{B}(x_0, r) = \{x; |x - x_0| \leq r\}$.

Indicaremos por $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, o conjunto das funções reais definidas em Ω de classe C^k , ou seja, se $u \in C^k(\Omega)$ então, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é k vezes diferenciável com todas as derivadas de ordem até k , contínuas. Caso u tenha derivada de todas as ordens e contínuas, diremos que u é de classe C^∞ . No caso particular em que $k = 0$, temos

$$C(\Omega) := C^0(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é contínua}\}.$$

O suporte de $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $\text{supp}(u)$, é definido como o fecho do conjunto de pontos do domínio em que a função não se anule. Ou seja, $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$ em Ω . Diremos que u tem *suporte compacto* em Ω se $\text{supp}(u) \subseteq \Omega$. Por exemplo, a função $u: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x) = 1$, $0 < x < 1$, possui $\text{supp}(u) = (0; 1)$ que não é um compacto. Como temos interesse especial nas funções com suporte compacto de classe C^∞ , definimos

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \text{supp}(u) \text{ é compacto}\},$$

como sendo o espaço vetorial das funções $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e com suporte compacto em Ω . Este conjunto é não vazio, conforme o clássico exemplo dado pela função

$$u(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{a^2}{|x|^2 - a^2}\right) & \text{se } |x| < a \\ 0 & \text{se } |x| \geq a \end{cases}$$

cujo $\text{supp}(u) = \overline{B}(0, a) = \{x; |x| \leq a\}$ é compacto, detalhado em KESAVAN (1989, Example 1.2.1, p. 4). As funções com suporte compacto que também são contínuas ou infinitamente diferenciáveis são de particular importância: neste caso, o campo está restrito a uma classe muito restrita de funções, chamadas de funções teste, que são usadas principalmente na teoria das distribuições.

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dois espaços (vetoriais) normados. Denotaremos por

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T: X \rightarrow Y; T \text{ é linear e contínua}\}$$

o espaço (vetorial) normado das aplicações lineares contínuas de X em Y , cuja norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Quando Y é Banach, temos então $\mathcal{L}(X, Y)$ Banach. Denotamos por $(X', \|\cdot\|_{X'})$ o espaço dual de X , ou seja, $X' = \mathcal{L}(X; \mathbb{R})$ é o espaço de todas os funcionais lineares e contínuas $T: X \rightarrow \mathbb{R}$. Note que X' é Banach, pois $\mathbb{R}$ é completo e a norma dual é dada por

$$\|T\|_{X'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |Tx|.$$

Se $X \subset Y$, dizemos que X está *imerso continuamente* em Y se existe $C > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$, $\forall x \in X$. Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$. Dizemos que X está *compactamente imerso* em Y , e denotamos por $X \xhookrightarrow{c} Y$, se $X \hookrightarrow Y$ e qualquer sequência limitada em X tem uma subsequência convergente em Y .

1.2 Topologias Fraca e Fraca Estrela

Seja X um espaço de Banach. A *topologia Fraca* em X , indicada por $\sigma(X, X')$, é a topologia menos fina que torna contínuo todos os funcionais $(T_f)_{f \in X'}$ tais que $T_f: X \rightarrow \mathbb{R}$ são dados por $T_f(x) = f(x) = \langle f, x \rangle$, com $f \in X'$. Uma sequência $\{x_n\} \subset X$ *converge fracamente para* $x \in X$ se, e somente se, $|f(x_n) - f(x)| \rightarrow 0$, $\forall f \in X'$. Neste caso, dizemos que converge no sentido $\sigma(X, X')$ e escrevemos $x_n \rightharpoonup x$.

Proposição 1.1.

A topologia fraca $\sigma(X, X')$ é Hausdorff.

Demonstração. Ver BREZIS (2010, Proposition 3.3, p. 57). □

Proposição 1.2.

Seja X um espaço de Banach e $\{x_n\} \subset X$ uma sequência, então:

- (i) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x), \forall f \in X'$;
- (ii) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$;
- (iii) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \{\|x_n\|\}$ é limitada e $\|x\| < \liminf \|x_n\|$;
- (iv) $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \rightarrow f$ em $X' \Rightarrow f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demonstração. Ver BREZIS (2010, Proposition 3.5, p. 58). □

Vamos definir uma terceira topologia em X' , chamada *topologia fraca estrela*. Para todo $x \in X$ considere o funcional linear $T_x: X' \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $T_x(f) = f(x) = \langle f, x \rangle$. Conforme x passa por X , obtemos uma coleção $(T_x)_{x \in X}$ de aplicações de X' para $\mathbb{R}$. A *topologia Fraca Estrela*, denotada por $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina em relação à qual o funcional T_x é contínuo para cada $x \in X$. Esta topologia é usada, por exemplo, no espaço das distribuições (de Schwartz). Uma sequência $\{f_n\} \subset X'$ *converge fracamente estrela* para $f \in X'$ se, e somente se, $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$, $\forall x \in X$. Neste caso, dizemos que converge no sentido $\sigma(X', X)$ e escrevemos $f_n \xrightarrow{*} f$.

Proposição 1.3.

A topologia fraca estreita $\sigma(X', X)$ é Hausdorff.

Demonstração. Ver BREZIS (2010, Proposition 3.11, p. 63). □

Proposição 1.4.

Seja X um espaço de Banach e $\{f_n\} \subset X'$ uma sequência, então:

- (i) $f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in X$;
- (ii) $f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n \xrightarrow{*} f$;
- (iii) $f_n \xrightarrow{*} f \Rightarrow \{\|f_n\|\}$ é limitada e $\|f\| < \liminf \|f_n\|$;
- (iv) $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' e $x_n \rightarrow x$ em $X \Rightarrow f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demonstração. Ver BREZIS (2010, Proposition 3.13, p. 63). □

Proposição 1.5.

Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja limitada em X . Então, existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca.

Demonstração. Ver BREZIS (2010, Theorem 3.18, p. 69). □

Proposição 1.6.

Seja X um espaço de Banach separável e suponha que a sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja limitada em X' . Então, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca estreita.

Demonstração. Ver BREZIS (2010, Corollary 3.30, p. 76). □

1.3 Espaços de Lebesgue

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, cuja potência $|u|^p$ é integrável à Lebesgue em Ω , isto é

$$L^p(\Omega) = \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

$L^p(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Um caso particular é quando $p = 1$, o conjunto das funções integráveis:

$$L^1(\Omega) = \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |u(x)| dx < \infty \right\}.$$

No caso especial em que $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ denotamos o espaço de Banach das (classes de) funções $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis e que são essencialmente limitadas em Ω , ou seja, existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$, quase sempre em Ω , cuja norma é dada por

$$\|u\|_{L^\infty} = \|u\|_\infty = \inf_{x \in \Omega} \{|u(x)| \leq C, \text{ q.s. em } \Omega\} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|.$$

Um número real a é chamado de cota superior para u se $u(x) \leq a$, para todo $x \in X$, isto é, se o conjunto $\{x \in X : u(x) > a\}$ é vazio. Por outro lado, a é dito uma cota superior essencial se o conjunto $\{x \in X : u(x) > a\}$ tem medida nula, isto é, se $u(x) \leq a$ para quase todo $x \in X$. Então, da mesma forma que o supremo de u é definido como a menor cota superior, o supremo essencial é definido como a menor cota superior essencial. Mais formalmente, o supremo essencial de u , $\sup \text{ess}(u)$, é definido por $\sup \text{ess}(u) = \inf \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : u(x) > a\}) = 0\}$. Se o conjunto $\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : u(x) > a\}) = 0\}$ das cotas superiores essenciais é não vazio, e $\sup \text{ess}(u) = +\infty$ em outros casos.

Dizemos que os números $1 \leq p, q \leq \infty$ são *conjugados de Lebesgue* se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Três desigualdades básicas, de suma importância na teoria desses espaços, com demonstrações disponíveis em **ADAMS e FOURNIER (2003, Chapter 4)**, são:

$$\text{Desigualdade de Young:} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{desigualdade de Minkowski:} \quad \|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \quad u, v \in L^p(\Omega)$$

$$\text{desigualdade de Hölder:} \quad \|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q \quad u \in L^p(\Omega), \quad v \in L^q(\Omega)$$

Por fim, a tabela a seguir resume as propriedades, quanto a reflexibilidade, separabilidade e dualidade, dos espaços $L^p(\Omega)$, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável:

	Reflexivo	Separável	Dual
L^p ($1 < p < \infty$)	✓	✓	L^q
L^1	×	✓	L^∞
L^∞	×	×	L^1

Tabela 1 – Propriedades de L^p : Reflexibilidade, Separabilidade e Dualidade

1.4 Espaço das Distribuições

Nesta seção, generalizaremos o conceito de função trazendo o conceito de distribuição (de Schwartz), dada por **SCHWARTZ (1966)**. Como motivação, vemos que o cálculo clássico para funções de várias variáveis é inadequado se deseja ter uma teoria simples e geral para EDPs. Por exemplo, as duas equações

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0,$$

possuem soluções distintas. A primeira é satisfeita por $u(x, y) = |x|$, enquanto que $\frac{\partial u}{\partial x}$ não está definida para $x = 0$. Dois modos, aparentemente opostos, fazem com que as duas equações possuam o mesmo conjunto solução: restringir o espaço de soluções possíveis a funções bastante regulares tal que o Teorema de Schwarz [Lima (2000, p. 147)] seja aplicado ou generalizar o conceito de função de tal forma que a derivação seja sempre possível. O segundo modo é vantajoso pelo fato em que contamos com o maior número possível de candidatos para o conjunto solução quando desejamos solucionar uma EDP.

Para isso, estabelecemos uma noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$. Uma sequência de funções $\{\varphi_n\} \in C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero se existir um conjunto compacto fixado $K \Subset \Omega$ com $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall n$, e tal que φ_n e todas as suas derivadas convergem uniformemente para zero em K .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com essa noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado *espaço das funções testes em Ω* . É um espaço vetorial topológico, ou seja, um espaço topológico de Hausdorff que também é um espaço vetorial para o qual as operações de adição e multiplicação por escalar são contínuas. A noção de função será generalizada considerando funcionais lineares em $\mathcal{D}(\Omega)$ que são contínuos em relação à essa topologia.

Uma *distribuição* sobre Ω é um funcional linear $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínuo na convergência dada acima. Ou seja, se $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\{\varphi_n\}$ uma sequência em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} T(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) &= T(\varphi_1) + \lambda T(\varphi_2) && \text{(linearidade)} \\ \varphi_j \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) &\Rightarrow T(\varphi_j) \longrightarrow 0 = T(0) && \text{(continuidade)} \end{aligned}$$

O conjunto de todas as distribuições sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço vetorial $\mathcal{D}'(\Omega)$, dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, chamado de *espaço das distribuições (de Schwartz) em Ω* , e $\mathcal{D}'(\Omega)$ recebe a topologia fraca estrela. Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, escrevemos simplesmente $\mathcal{D}'$. O valor de T em φ é representado por $\langle T, \varphi \rangle$ em vez de $T(\varphi)$. Dizemos que uma sequência de distribuições $\{T_n\}$ converge para zero quando para toda função teste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a sequência $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge para zero em $\mathbb{R}$. Neste caso escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ quando } \lim_{n \rightarrow \infty} T_n - T = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Indicamos também por: $\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico.

Um modo de gerar distribuições é considerar funções localmente integráveis. Uma função $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser *localmente integrável* em Ω , e indicamos por $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, se for integrável segundo Lebesgue para todo compacto K de Ω , isto é

$$L_{\text{loc}}^1(\Omega) := \{u \in L^1(K); K \Subset \Omega\}.$$

Evidentemente, toda função contínua é localmente integrável, logo $C(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Dada $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ definimos o funcional linear $Tu: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$Tu(\varphi) = \langle Tu, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $Tu \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, a linearidade de Tu é dada pela linearidade da integral e a continuidade decorre da estimativa

$$|\langle Tu, \varphi_n \rangle| \leq \int_{\Omega} |u(x)| |\varphi_n(x)| dx \leq \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \int_K |u(x)| dx \rightarrow 0,$$

em que a sequência $\{\varphi_n\}$ de funções teste sobre Ω convergem para zero e K é um compacto de Ω contendo $\text{supp}(\varphi_n - \varphi)$, para todo n . Dizemos então, que a distribuição Tu é dita *gerada* pela função $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

O Lema de Du Bois-Reymond, Proposição 1.4, MEDEIROS e MIRANDA (2019, p. 11), diz que dada $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, então $Tu = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω . Implicando que Tu é univocamente determinada por u sobre Ω , quase sempre, no sentido que se $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, então $Tu = Tv$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . De fato,

$$\begin{aligned} Tu = Tv &\iff \langle Tu, \varphi \rangle = \langle Tv, \varphi \rangle, & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\iff \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} v(x)\varphi(x) dx & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\iff \int_{\Omega} (u - v)(x)\varphi(x) dx = 0 & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\iff u - v = 0, & \text{q.s. em } \Omega \end{aligned}$$

Devido a este fato, identifica-se u com a distribuição Tu por ela definida e diz-se a *distribuição u em vez de a distribuição Tu* .

Contudo, é importante observar que existem distribuições que são definidas por funções que não são $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Um exemplo clássico é a distribuição de Dirac. Seja x_0 um ponto de Ω e definimos o funcional linear $\delta_{x_0}: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então δ_{x_0} é uma distribuição sobre Ω , denominada *distribuição de Dirac*. Quando $x_0 = 0$ temos $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Mostra-se que ela não é definida por uma função $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ou seja, não existe $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ em que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

conforme MEDEIROS e MIRANDA (2019, Exemplo 1.6, p. 13). Assim, vimos que $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é uma parte própria de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Um observação importante, conforme MEDEIROS e MIRANDA (2019, Observação 1.4, p. 14), é dada nas seguintes imersões importantes:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty. \quad (1.1)$$

Além disso, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.7.

$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. ADAMS e FOURNIER (2003, Theorem 2.19, p. 31). □

1.4.1 Derivada de Distribuições

A primeira operação importante nas distribuições é a diferenciação. Um *multi-índice* é uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos, a *ordem* desse multi-índice α é $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Denotamos por D^α o *operador derivação*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0) = 0$, temos $D^0 u = u$. Em particular, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $u = u(x, y)$ uma função real, temos que

$$\{D^\alpha u; |\alpha| \leq 2\} = \{u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}, u_{xx}\}.$$

pois

$$\begin{aligned} D^{(0,0)} u &= \frac{\partial^0 u}{\partial x^0 \partial y^0} = u; & D^{(1,0)} u &= \frac{\partial^1 u}{\partial x^1 \partial y^0} = u_x; & D^{(0,1)} u &= \frac{\partial^1 u}{\partial x^0 \partial y^1} = u_y; \\ D^{(1,1)} u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial y^1} = u_{xy}; & D^{(0,2)} u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^0 \partial y^2} = u_{yy}; & D^{(2,0)} u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y^0} = u_{xx}. \end{aligned}$$

Seja $u \in C^1(\Omega)$. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, desde que φ se anule fora de algum subconjunto compacto de Ω , por integração por partes na variável x_i , temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx.$$

Analogamente, se $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então integrando por parte $|\alpha|$ vezes temos

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx.$$

Motivando, portanto, a seguinte definição da derivada $D^\alpha T$ de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ uma distribuição, $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T em φ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. A *derivada (distribucional) de ordem α* de T , denotada por $D^\alpha T$, é definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.2)$$

Temos aqui que, conforme ADAMS e FOURNIER (2003, p. 21), $D^\alpha T$ é uma distribuição, isto é, a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha: \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência dada em $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$T_n \rightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \implies D^\alpha T_n \rightarrow D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Pela [Equação 1.2](#), T possui derivadas de todas as ordens. Como consequência, as funções $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. No entanto, a derivada de uma função $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ não é, em geral, uma função de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Por exemplo, seja H a função de Heaviside em $\mathbb{R}$, dada por $H(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $H(x) = 0$ se $x < 0$. Vemos que $H \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e, portanto, define uma distribuição. Derivando no sentido das distribuições, temos

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi' dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (1.3)$$

Assim, no sentido das distribuições, $H' = \delta_0 \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Logo $H' = \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Sobolev definiu a derivada fraca de uma função $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ da seguinte forma: se existir a função $v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}\Omega$ tal que $Tv_\alpha = D^\alpha Tu$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, única a menos de um conjunto de medida nula, é chamada de *derivada fraca* de u , e denotada por $D^\alpha u$. Assim, $D^\alpha u = v_\alpha$ no sentido fraco, desde que $v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfaça

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por exemplo, seja a função $f(t) = 0$, se $t < 0$, e $f(t) = t$ se $t \geq 0$. Seja $u = T_f$. Se φ é uma função teste, então

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle &= -\int_0^\infty t \varphi'(t) dt = -t \varphi(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \varphi(t) dt = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \varphi(t) dt \\ &= \langle T_H, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Assim, f tem derivada fraca, a qual é a função de Heaviside H , mesmo não sendo derivável.

1.5 Espaços de Sobolev

Toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens, no sentido das distribuições. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções em $L^p(\Omega)$. Este fato levou o russo Sergei Lvovich Sobolev (★1908 — †1989) a idealizar uma nova classe de espaços vetoriais, os quais fornecem um cenário funcional adequado para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Estes espaços são, em sua homenagem, chamados de *Espaços de Sobolev*.

Seja $m > 0$ um inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O *Espaço de Sobolev de ordem m* , denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α , pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$. Então,

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

Note que, quando $m = 0$, temos $W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{m,p} := \|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u(x)\|_p$$

é Banach, conforme **ADAMS e FOURNIER (2003, Theorem 3.3, p. 60)**. Para $1 \leq p < \infty$, temos

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

e, para $p = \infty$, temos

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\infty}.$$

O caso particularmente interessante é quando $p = 2$, somente neste caso $W^{m,p}(\Omega)$ é um Espaço de Hilbert, que denotamos por $H^m(\Omega)$. Simbolicamente, escrevemos:

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N} \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

Em $H^m(\Omega)$, indicamos a norma por $\|u\|_m$ e o produto interno por $\langle u, v \rangle_m$ dados, respectivamente, por

$$\|u\|_m^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 \quad \text{e} \quad \langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Para $m = 1$, temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

norma induzida e produto interno dados, respectivamente, por

$$\|u\|_{1,2}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \langle u, v \rangle_{1,2} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

Temos que $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$. Além disso, $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável, conforme **ADAMS e FOURNIER (2003, Theorem 3.6, p. 61)**.

1.5.1 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Pela Proposição 1.7, sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, entretanto não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ seja denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$, pois a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é “bem maior” do que a norma de $L^p(\Omega)$ daí, $W^{m,p}(\Omega)$ possui “menos” seqüências convergentes. Assim, vemos a necessidade de definir $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} W_0^{m,p}(\Omega) &:= \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} \\ H_0^m(\Omega) &:= \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)} = W_0^{m,2}(\Omega), \quad \text{caso especial quando } p = 2. \end{aligned}$$

Ou seja, $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ tais que $u_m \rightarrow u$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Costumamos interpretar $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o espaço que contém funções $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tais que $D^\alpha u = 0$ em $\partial\Omega$, para todo $|\alpha| \leq m-1$.

No caso particular em que $m = 1$, as funções em $W_0^{1,p}(\Omega)$ são “aproximadamente” aquelas de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulam em $\partial\Omega$. Assim, $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$, vide KESAVAN (1989, Theorem 2.2.6, p. 61).

Claramente, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e, temos $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, pois $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.

Em geral, $W^{m,p}(\Omega) \neq W_0^{m,p}(\Omega)$. A seguinte proposição caracteriza os elementos de $W^{m,p}(\Omega)$ que possuem suporte compacto.

Proposição 1.8.

Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e u possui suporte compacto em Ω então $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

Demonstração. MEDEIROS e MIRANDA (2019, Proposição 2.4, p. 28) □

Teorema 1.9 (Desigualdade de Poincaré).

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e limitado e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante $C_p > 0$ (dependendo de Ω e de p) tal que

$$\|u\|_p \leq C_p \|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

C_p é denominada de *constante de Poincaré*.

Demonstração. BREZIS (2010, Corollary 9.19, p. 290) □

Temos uma importante consequência dessa desigualdade. Considere em $H_0^1(\Omega)$ a expressão

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 = \|\nabla u\|_2^2$$

e a norma usual em $H_0^1(\Omega)$ definida por

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2.$$

Da desigualdade de Poincaré segue que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$. Por outro lado, é imediato $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq \|\nabla u\|_2^2$. Logo, a expressão

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 = \|\nabla u\|_2^2 = \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx$$

é uma norma equivalente a norma usual em $H_0^1(\Omega)$. Definindo

$$a(u, v) = ((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

temos que $\|u\|^2 = a(u, u)$. Em geral, em $H_0^m(\Omega)$ consideramos a norma como sendo

$$\|u\|^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx.$$

Sejam p e q os conjugados de Lebesgue. Representamos o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ por $W_0^{-m,q}(\Omega)$ e, no caso especial em que $p = 2$, temos $H^{-m}(\Omega)$ como o dual topológico de $H^m(\Omega)$.

Quando restringimos $1 < p < \infty$ temos que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo. Consequentemente, pela Proposição 1.5, toda sequência limitada de vetores de $W^{m,p}(\Omega)$ possui uma subsequência fracamente convergente em $W^{m,p}(\Omega)$.

Quando dizemos que uma distribuição T pertence a $W^{-m,q}(\Omega)$, estamos dizendo que T , definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, pode ser estendida como um funcional linear contínuo ao espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$. Esta extensão contínua permanecerá sendo representada por T . De fato, temos a seguinte inclusão:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m,p}(\Omega).$$

O resultado seguinte caracteriza as distribuições definidas em $W^{-m,q}(\Omega)$.

Teorema 1.10.

Seja T uma distribuição sobre Ω . Então $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tais que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha.$$

Demonstração. MEDEIROS e MIRANDA (2019, Teorema 2.2, p. 29). □

Seja L o operador diferencial dado por

$$L(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u.$$

$L(u)$ é uma distribuição não necessariamente definida por uma função de $L_{loc}^1(\Omega)$. Além disso, se $u \in H^m(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$ então pelo Teorema 1.10 temos que $g_\alpha = D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ e, portanto

$$L(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g_\alpha \in H^{-m}(\Omega),$$

logo devemos considerar L como um operador linear de $H^m(\Omega)$ em $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.11.

O operador L transforma $H_0^m(\Omega)$ sobre $H^{-m}(\Omega)$, de maneira isométrica.

Demonstração. MEDEIROS e MIRANDA (2019, Proposição 2.6, p.33). □

Em particular, para $m = 1$, o operador

$$-\Delta: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

é uma isometria linear.

1.5.2 Teoremas de Compacidade

Enunciaremos alguns resultados fundamentais dos Espaços de Sobolev. Começamos com o Teorema de Rellich-Kondrachov¹ sobre imersões compactas de espaços de Sobolev e o Teorema de Sobolev para espaços $W^{m,p}(\Omega)$ para o caso em que Ω é um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. As demonstrações destes teoremas podem ser obtidas em **ADAMS e FOURNIER (2003)**, a partir dos resultados de imersões para os espaços $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ utilizando o operador, linear e contínuo, de prolongamento

$$P: W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } Pu|_{\Omega} = u \text{ quase sempre em } \Omega$$

dado em **KESAVAN (1989, Theorem 2.3.2, p. 68)**

Estes operadores são importantes porque permitem estender as propriedades de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ aos espaços $W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.12 (Rellich-Kondrachov).

Se Ω é de classe C^1 , então:

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \frac{np}{n-p}, \quad p < n \\ W^{1,p}(\Omega) &\xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty, \quad p = n \\ W^{1,p}(\Omega) &\xhookrightarrow{c} C(\overline{\Omega}), \quad p > n. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver **KESAVAN (1989, Theorem 2.5.3, p. 84)**. □

Teorema 1.13 (Imersão Compacta).

Se Ω é de classe C^m e $1 \leq p < \infty$, então:

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &\xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \frac{np}{n-mp}, \quad mp < n \\ W^{m,p}(\Omega) &\xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty, \quad mp = n \\ W^{m,p}(\Omega) &\xhookrightarrow{c} C(\overline{\Omega}), \quad k < m - \frac{n}{p} \leq k+1 \quad mp > n, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver **MEDEIROS e MIRANDA (2019, Teorema 2.20, p. 83)**. □

Seja $1 \leq p < n$. O conjugado de Sobolev p^* de p é definido por

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \text{ ou } p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Teorema 1.14 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg).

Sejam $1 \leq p \leq n$, temos

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Demonstração. Ver **RIVERA (2004, Teorema 5.7.1, p. 129)**. □

¹ Franz Rellich (1906 — 1955) e Vladimir I. Kondrashov (1909 — 1971). Rellich provou em L^2 e Kondrashov em L^p .

1.6 Os Espaços $L^p(0, T; X)$

Seja X um espaço de Banach, $1 \leq p < \infty$ e $T > 0$. Denotamos por $L^p(0, T; X)$ o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais mensuráveis $u: (0, T) \rightarrow X$ tais que a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|_X$ está em $L^p(0, T)$ ou, equivalentemente $\|u(t)\|_X^p \in L^1(0, T)$. Se $p = \infty$, $L^\infty(0, T; X)$ é o espaço das funções mensuráveis $u: (0, T) \rightarrow X$ que são essencialmente limitadas.

Esses espaços são Banach, com respeito às normas

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(0, T; X)}^p &= \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} &= \sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_X.\end{aligned}$$

Somente no caso em que $p = 2$ e $X = H$ é Hilbert, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt.$$

Identificamos os espaços duais como

$$[L^p(0, T; X)]' = L^q(0, T; X), \quad 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

No caso em que $p = 1$, temos $[L^1(0, T; X)]' = L^\infty(0, T; X)$. Ainda, $L^p(0, T; X)$, $1 < p < \infty$, é reflexivo se X for reflexivo e, separável, $1 \leq p < \infty$, se X for separável.

Proposição 1.15.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Considere $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^p(0, T; X)$ e $u: (0, T) \rightarrow X$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X quase sempre em $(0, T)$, então:

(i) $u \in L^p(0, T; X)$;

(ii) Se $1 < p$, então $\int_0^T u_n \varphi dt \rightarrow \int_0^T u \varphi dt$, para toda $\varphi \in C_0(0, T)$ conjunto das funções contínuas com suporte compacto em $(0, T)$.

Teorema 1.16 (Lema de Compacidade de Aubin-Lions).

Sejam X_0 , X e X_1 espaços de Banach tais que $X_0 \xhookrightarrow{c} X \hookrightarrow X_1$, com X_0 e X_1 reflexivos. Definimos

$$W = \{u \in L^p(0, T; X_0); u' \in L^p(0, T; X_1)\}.$$

Se $1 \leq p < \infty$ e $q = 1$ ou, se $p = \infty$ e $q > 1$, então $W \xhookrightarrow{c} L^p(0, T; X_0)$.

Demonstração. Ver AUBIN (1963). □

Teorema 1.17 (Lema de Lions).

Seja Q um aberto limitado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, g_μ e g funções em $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$ tais que $\|g_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C$ e $g_\mu \rightarrow g$ quase sempre em Q . Então $g_\mu \rightarrow g$ em $L^q(Q)$.

Demonstração. Ver **LIONS** (1969, Lemme 1.3, Chapitre 1). □

Teorema 1.18.

Seja X um espaço de Banach. $f \in L^p(0, T; X)$ e $f' \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, então a função $t \mapsto f(t)$ é contínua de $[0, T] \rightarrow X$ a menos de um conjunto de medida nula.

Demonstração. Ver **LIONS** (1969, Lemme 1.2, Chapitre 1). □

1.7 O Prolongamento de Soluções

Apresentaremos as condições de Carathéodory e o prolongamento de soluções, resultados indispensáveis para provar a existência de soluções pelo método de Faedo-Galerkin.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $Q = \Omega \times [0, T]$, $T > 0$. Considere uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Denotando $x = g(t)$, dizemos que uma função $G: Q \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre Q se:

- (i) $G(x, t)$ é mensurável em t para cada x fixo;
- (ii) $G(x, t)$ é contínua em x para cada t fixo;
- (iii) Para cada compacto $K \subset Q$, existe uma função real integrável $M_K(t)$ tal que

$$|G(x, t)| \leq M_K(t) \text{ para todo } (x, t) \in Q.$$

Teorema 1.19 (de Caratheodóry – Constantin Caratheodóry 1873–1950).

Se $G: Q \rightarrow \mathbb{R}$ está nas condições de Carathéodory, então o sistema

$$x' = G(x, t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.4}$$

admite uma solução em um intervalo $[0, t)$, $t \leq T$.

Demonstração. **Hale** (1997, Theorem.5.1, p. 28) □

Teorema 1.20 (Teorema do Prolongamento).

Seja $G: Q \rightarrow \mathbb{R}$ nas condições de Carathéodory e $x(t)$ a solução da [Equação 1.4](#). Se $|G(x, t)| \leq M$ independente de t , então $x(t)$ possui um prolongamento a todo o intervalo $[0, T]$.

Demonstração. **Hale** (1997, Theorem.5.2, p. 29) □

Lema 1.21 (Lema de Gronwall ou Desigualdade de Gronwall).

Se A e B são constantes reais positivas, $f(t)$ e $g(t) \geq 0$ são funções reais contínuas para $a \leq t \leq b$ que satisfazem

$$f(t) \leq A + B \int_a^t f(s)g(s) ds, \quad a \leq t \leq b,$$

então

$$f(t) \leq A \exp\left(B \int_a^t g(s) ds\right), \quad a \leq t \leq b.$$

Demonstração. Hale (1997, Corollary 6.6, p. 36) □

Lema 1.22 (Desigualdade Gronwall generalizada).

Se $f(t)$ e $A(t)$ são funções reais e contínuas para $a \leq t \leq b$, $g(t) \geq 0$ integrável em $[a, b]$ e

$$f(t) \leq A(t) + \int_a^t f(s)g(s) ds, \quad a \leq t \leq b$$

então

$$f(t) \leq A(t) + \int_a^t g(s)A(s) \left[\exp\left(\int_s^t g(u) du\right) \right] ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Demonstração. Hale (1997, Lemma 6.2, p. 36) □

1.8 Método de Faedo-Galerkin

Conforme KESAVAN (1989, p. 141) o *Método de Galerkin* é um método de aproximação de soluções para abstrair equações funcionais. Também pode ser usado para provar a existência de soluções em uma topologia adequada. Esse método foi desenvolvido por Boris Grigorievitch Galerkin, que nasceu em 1871 na Polatsk, Império Russo, agora parte da Bielorrússia, e faleceu em 1945 em Moscou. O primeiro trabalho publicado foi em 1915, escrito por ele mesmo, Galerkin (1915), e foi proposto um método de integração aproximada de Equações Diferenciais Parciais, muito conhecido como “Método de Galerkin”.

O *Método de Faedo-Galerkin*, idealizado para encontrar soluções dos problemas de evolução, foi desenvolvido por Sandro Faedo [Faedo (1949)]. Ele consiste em obter a solução de um problema através de soluções aproximadas. Nesta direção, a busca de solução em um espaço V de dimensão infinita dotado de norma, produto interno e uma base enumerável ortonormal $\{w_1, w_2, \dots, w_m, \dots\}$ é realizada utilizando, para cada m , o espaço gerado

$$V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m].$$

O método é completado com as seguintes etapas:

1. **O Problema aproximado (ou Aproximações de Galerkin):** consiste em projetar o problema em subspaços de dimensão finita V_m , obtendo uma sequência de soluções aproximadas u^m definidas num intervalo $[0, t_m)$, o problema aproximado. Este, por sua vez, é um sistema de equações diferenciais ordinárias com valores iniciais, cuja existência de solução local será garantida pelo teorema de Carathéodory (Teorema 1.19);

2. **Estimativas a priori:** consiste em fazer estimativas sobre as soluções u^m com o objetivo de poder garantir a extensão destas soluções a um intervalo que independa de m e mostrar que a sequência de soluções aproximadas converge para a solução desejada. Isto é feito via estimativas a priori. Utiliza-se o teorema do prolongamento de soluções (Teorema 1.20) estendendo a solução local para o intervalo $[0, T]$;
3. **Passagem ao limite:** consiste em mostrar que as soluções aproximadas convergem fracamente para a solução do problema original. O Lema de Compacidade de Aubin-Lions (Teorema 1.16) e o Lema de Lions (Teorema 1.17) são essenciais;
4. **Verificação dos dados iniciais:** consiste em verificar que a solução obtida na etapa anterior satisfaz os dados iniciais;
5. **Unicidade de solução:** Provamos a unicidade de solução do problema original e deduzimos que toda subsequência de u^m tem o mesmo limite e, então, a sequência inteira converge para o limite fraco.

1.9 O Operador Pseudo Laplaciano

Aqui, apresentamos alguns conceitos e resultados suficientes para o entendimento desse importante operador, que são um recorte dos textos de LIONS (1969) e Cavalcanti e Cavalcanti (2010).

Sejam X um espaço de Banach, X' seu dual e $A: X \rightarrow X'$ uma aplicação. Conforme LIONS (1969, Chap. 2, Sec. 1.2), dizemos que:

(i) A é *hemicontínua* se, a função $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle_{X', X}$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é contínua, para todo $u, v, w \in X$;

(ii) A é *monótona* se

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{X', X} \geq 0, \quad \forall u, v \in X;$$

(iii) A é *coerciva* se,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle A(v), v \rangle}{\|v\|} = +\infty, \quad v \in X;$$

(iv) A é *limitada* quando A leva limitados de X em limitados de X' , ou seja, qualquer que seja $U \subset X$ limitado em X , temos que $A(U) \subset X'$ é limitado em X' .

Teorema 1.23 (Browder-Minty-Visik).

Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável. Se $A: X \rightarrow X'$ for monótona, hemicontínua, limitada e coerciva, então A é sobrejetiva.

Uma aplicação imediata deste teorema é a seguinte: dados $f \in X'$ existe $u \in X$ tal que $Au = f$ sempre que $A: X \rightarrow X'$ estiver nas condições do teorema acima.

1.9.1 Derivada de Gateaux

A derivada de Gateaux é uma generalização do conceito de derivada direcional no cálculo diferencial. Nomeado em homenagem ao matemático francês René Eugène Gâteaux (1889–1914), é definida para funções entre espaços vetoriais topológicos localmente convexos, como os espaços de Banach, e é frequentemente usado para generalizar a derivada variacional, comumente usada no cálculo variacional. Os métodos variacionais utilizam derivadas para resolver problemas na teoria das equações diferenciais. A ideia central consiste em substituir a busca de solução da equação diferencial, pela busca de um ponto de mínimo (ou de máximo) de um funcional associado à equação.

Seja X um espaço de Banach e $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. Se para cada $u, v \in X$ existir o limite

$$J'(u, v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda}$$

dizemos que $J'(u, v)$ é a *primeira variação* de J em u na direção de v .

Fixando $u \in X$, vamos considerar $u^* \in X'$ o qual denotamos por $u^* = J'(u)$ de tal forma que $J'(u)(v) = J'(u, v)$, $\forall v \in X$.

Definição 1.24.

Se $J'(u)(v)$ for linear e contínua, representamos $J'(u)(v)$ por

$$\langle J'(u), v \rangle_{X' \times X} = J'(u, v)$$

e, neste caso, dizemos que J é *diferenciável a Gateaux* e que $J'(u)$ é a *derivada de Gateaux* de J em u .

Observamos que, se $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ for diferenciável a Gateaux para todo $u \in X$, então fica definido um operador

$$\begin{aligned} J': X &\longrightarrow X' \\ u &\longmapsto J'(u) \end{aligned}$$

em que

$$\langle J'(u), v \rangle = J'(u, v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda}, \quad \forall u, v \in X.$$

Por exemplo, seja $X = L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$. Considere $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, tal que

$$|g(s)| \leq \alpha |s|^p, \quad \alpha > 0$$

$$|g'(s)| \leq \beta |s|^{p-1}, \quad \beta > 0.$$

Definimos $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $J(u) = \int_{\Omega} g(u(x)) dx$, que está bem definida, pois $\forall x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} |g(u(x))| &\leq \alpha |u(x)|^p, \\ \int_{\Omega} |g(u(x))| dx &\leq \alpha \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty. \end{aligned}$$

Vamos calcular a derivada de Gateaux de J , isto é, dados $u, v \in L^p(\Omega)$, calcularemos a primeira variação de J em u na direção de v

$$J'(u, v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} [g(u(x) + \lambda v(x)) - g(u(x))] dx$$

Dados, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ tais que $\xi < \eta$, pelo teorema do valor médio existe $\xi_0 \in (\xi, \eta)$ de modo que $g(\xi) - g(\eta) = g'(\xi_0)(\xi - \eta)$. Como $\xi < \xi_0 < \eta$, existe $\theta \in [0, 1]$ tal que $\xi_0 = (1 - \theta)\eta + \theta\xi = (\xi - \eta)\theta + \eta$.

Em particular, sem perda de generalidade, podemos supor $v(x) > 0$ para cada $x \in \Omega$ e $\lambda > 0$. Logo existe $\theta_\lambda(x)$ com $0 < \theta_\lambda(x) < 1$ tal que

$$g(u(x) + \lambda v(x)) - g(u(x)) = g'(u(x) + \lambda \theta_\lambda(x) v(x)) \lambda v(x)$$

e, como $\theta_\lambda(x)$ é limitado e $\lambda \rightarrow 0$, temos $\lambda \theta_\lambda(x) \rightarrow 0$, $\forall x \in \Omega$.

Pela continuidade de g' , temos

$$g'(u(x) + \lambda \theta_\lambda(x) v(x)) \longrightarrow g'(u(x)) v(x). \quad (1.5)$$

Como $|g'(s)| \leq \beta |s|^{p-1}$, $\beta > 0$, temos para $0 < \lambda < 1$ o seguinte

$$\begin{aligned} |g'(u(x) + \lambda \theta_\lambda(x) v(x))| |v(x)| &\leq \beta |u(x) + \lambda \theta_\lambda(x) v(x)| |v(x)| \\ &\leq \beta C(p) \{|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}\} |v(x)| \\ &= \beta C(p) \{|u(x)|^{p-1} |v(x)| + |v(x)|^p\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Note que $|u|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, pois

$$\int_{\Omega} [|u|^{p-1}]^{p'} dx = \int_{\Omega} [|u|^{p-1}]^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty.$$

Pela desigualdade de Hölder ($\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^p}$), temos $|u|^{p-1} |v|^p \leq \| |u|^{p-1} \|_{L^{p'}} \|v\|_{L^p}^p$ e, daí $|u|^{p-1} |v| \in L^1(\Omega)$. Portanto, (1.6) é integrável.

Agora note que

$$J'(u, v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} g'(u(x) + \lambda \theta_\lambda(x) v(x)) \lambda v(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Omega} g'(u(x) + \lambda \theta_\lambda(x) v(x)) v(x) dx.$$

Da convergência (1.5) e (1.6), pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue temos

$$J'(u, v) = \int_{\Omega} g'(u(x)) v(x) dx.$$

Assim, temos $|J'(u, v)| = \int_{\Omega} |g'(u(x))| |v(x)| dx$. Considere, para cada $u \in L^p(\Omega)$ fixado, $J': L^p(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega)$ dada por $\langle J'(u), v \rangle = J'(u, v)$. Vemos que

(i) J' é linear;

(ii) Seja $(u_v)_{v \in \mathbb{N}} \in L^p(\Omega)$ tal que $u_v \rightarrow 0$. Então, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |\langle J'(u), v \rangle|_{L^{p'} \times L^p} &\leq \int_{\Omega} |g'(u(x))| |u_v(x)| \, dx \leq \beta \int_{\Omega} |u(x)|^{p-1} |u_v(x)| \, dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega} |u_v(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \beta \|u(x)\|_{L^p}^{\frac{p}{p'}} \|u_v(x)\|_{L^p} \xrightarrow{u_v \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Temos que $J'(u)$ é linear e contínua em $L^{p'}(\Omega)$. Resulta da Definição 1.24

$$\langle J'(u), v \rangle = J'(u, v) = \int_{\Omega} g'(u(x)) v(x) \, dx$$

em que $J'(u) \in L^{p'}(\Omega)$ é a derivada de Gateaux de J em u .

Agora, considere $A: L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ um operador linear cujo domínio é dado por

$$W(\Omega, A) = \{u \in L^p(\Omega); Au \in L^p(\Omega)\}$$

munido da norma usual do gráfico $\|u\|_W^p = \|u\|_{L^p}^p + \|Au\|_{L^p}^p$. Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável satisfazendo, para $2 \leq p < \infty$,

$$|g(s)| \leq \alpha |s|^p, \quad \alpha > 0$$

$$|g'(s)| \leq \beta |s|^{p-1}, \quad \beta > 0.$$

Definimos o funcional

$$\begin{aligned} J: W(\Omega, A) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_{\Omega} g'(Au(x)) \, dx. \end{aligned}$$

Daí, análogo ao feito acima, podemos deduzir

$$J'(u, v) = \int_{\Omega} g'(Au(x)) Av(x) \, dx, \quad \forall u, v \in W(\Omega, A)$$

e, portanto, J é derivável a Gateaux com

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} g'(Au(x)) Av(x) \, dx.$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $2 \leq p < \infty$, seja

$$W_i(\Omega, A_i) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}$$

munido da topologia $\|u\|_{W_i}^p = \|u\|_{L^p}^p + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p$. Note que, para $\rho > 0$

$$f(s) = |s|^{\rho} s = \begin{cases} s^{\rho} s, & s \geq 0 \\ (-s)^{\rho} s, & s < 0 \end{cases} = \begin{cases} s^{\rho} s, & s \geq 0 \\ -(-s)^{\rho} (-s), & s < 0 \end{cases} = \begin{cases} s^{\rho+1}, & s \geq 0 \\ -(-s)^{\rho+1}, & s < 0 \end{cases}.$$

Daí,

$$f'(s) = \begin{cases} (\rho+1)s^\rho, & s \geq 0 \\ -(\rho+1)(-s)^\rho(-1), & s < 0 \end{cases} = (\rho+1)|s|^\rho.$$

Colocando $g(s) = |s|^\rho$, temos que $g(s) = (|s|^{p-2}s)$ e $g'(s) = p|s|^{p-2}s = p|s|^{p-1}$. Assim, g está nas seguintes condições:

$$\begin{aligned} |g(s)| &= |s|^\rho \\ |g'(s)| &\leq p|s|^{p-1} \end{aligned}$$

Logo, podemos definir para $i = 1, 2, \dots, n$, $2 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned} J_i: W(\Omega, A) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J_i(u) = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx \end{aligned}$$

sendo J_i diferenciável a Gateaux e

$$J'(u, v) = p \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad \forall u, v \in W_i(\Omega, A_i).$$

Considere agora

$$V = \bigcap_{i=1}^n W_i(\Omega, A_i) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Portanto, $V = W^{1,p}(\Omega)$. Definindo

$$\begin{aligned} J: W^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n J_i(u) \end{aligned}$$

temos a primeira variação de J em u na direção de v

$$\begin{aligned} J'(u, v) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{J_i(u + \lambda v) - J_i(u)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{p} \langle J_i(u), v \rangle = \frac{1}{p} \cdot p \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Pondo

$$\begin{aligned} J': W^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ v &\longmapsto \langle J'(u), v \rangle = J'(u, v) \end{aligned}$$

é fácil ver que J' é linear e contínua. Logo, a derivada de Gateaux de J em u é dada por

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Note que $g''(s) = p(p-1)|s|^{p-2}$. Logo, $g'(s) \geq 0$ e temos que $g(s) = |s|^\rho$ é convexo e pode ser verificado que

$$\begin{aligned} J': W^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \end{aligned}$$

é um funcional convexo e diferenciável a Gateaux.

Teorema 1.25.

Seja X um espaço de Banach separável e $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação convexa e diferenciável a Gateaux. Então a aplicação $u \mapsto J'(u)$, de X em X' , é monótona e hemicontínua.

Lembramos que o dual de $W^{1,p}(\Omega)$ não é um espaço de distribuições, vamos considerar $W_0^{1,p}(\Omega)$. Seja $J': W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$. Considere $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v \in D(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$. Temos:

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx \\ &= \langle -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), v \rangle \\ &= \langle A, v \rangle, \end{aligned}$$

em que $A = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$.

(i) Se $p = 2$, $A = \Delta$ (Laplaciano).

(ii) Se $2 < p < \infty$, A é denotado por $-\Delta_p$ e denominado *pseudo-Laplaciano*.

Podemos, por fim, considerar $-\Delta_p: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, tal que

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)}.$$

1.9.2 O Problema Estacionário

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{em } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases},$$

com $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$. Já sabemos que $-\Delta_p u: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ definido por

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

é monótono e hemicontínuo, posto que $-\Delta_p$ é a derivada de Gateaux do funcional convexo

$$\begin{aligned} J: W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^p dx. \end{aligned}$$

Veremos que $-\Delta_p$ é limitado e coercivo.

(i) $-\Delta_p$ é limitado:

$$|\langle -\Delta_p u, v \rangle| = \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \right| \leq \int_{\Omega} ||\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v| dx$$

Que, aplicando desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |\langle -\Delta_p u, v \rangle| &\leq \|\nabla u\|_{p'}^{p-2} \|\nabla u\|_{p'} \|\nabla v\|_p = \|\nabla u\|_p^{\frac{p}{p'}} \|\nabla v\|_p \\ &= \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p}{p'}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|-\Delta_p u\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} &= \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1} |\langle -\Delta_p u, v \rangle| \leq \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto $-\Delta_p$ leva limitado de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em limitado de $W^{-1,p'}(\Omega)$.

(ii) $-\Delta_p$ é coercivo:

Temos:

$$\langle -\Delta_p u, u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p.$$

Assim, obtemos

$$\lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty} \frac{\langle -\Delta_p u, u \rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} = +\infty$$

e, portanto $-\Delta_p$ é coercivo.

Sendo $-\Delta_p$ monótono, hemicontínuo, limitado e coercivo, segue pelo Teorema 1.23, de Browder-Minty-Visik, que existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f \\ u|_{\Gamma} &= 0. \end{cases}$$

1.10 O Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção apresentamos, sem sua demonstração, um teorema devido a **Ambrosetti e Rabinowitz (1973)** denominado *Teorema do Passo da Montanha*, que é essencial para a Teoria do Poço do Potencial. No entanto, primeiramente, vamos dar uma ideia (intuitiva) dele. Para esse fim, nos apoiamos no texto de **Ó (2004)** como referência, por elucidar de modo muito sucinto e preciso. Assim, conforme **Ó (2004)**, os métodos variacionais buscam transformar um problema original num problema de localizar pontos críticos de um funcional definido num espaço de funções adequado. Nos casos que o funcional não é limitado, nem inferiormente e nem superiormente, o método variacional não pode ser aplicado. Um clássico exemplo é dado com o funcional $I : W_0^{1,2}([0, \pi]) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left| \frac{du}{dx} \right|^2 - \frac{1}{4} u^4 \right) dx.$$

Se $u \in W_0^{1,2}([0, \pi])$ não-nulo, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$I(\lambda u) = \lambda^2 \int_0^\pi \frac{1}{2} \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx - \lambda^4 \int_0^\pi \frac{1}{4} u^4 dx,$$

em que $I(\lambda u) \rightarrow -\infty$ sempre que $\lambda \rightarrow \infty$, ou seja, I não é limitado inferiormente. Dado $n \in \mathbb{R}$

$$I(\sin(nx)) = n^2 \int_0^\pi \frac{1}{2} |\cos(nx)|^2 dx - \int_0^\pi \frac{1}{4} \sin^4(nx) dx \geq \frac{\pi}{4} (n^2 - 1).$$

Se $n \rightarrow \infty$, então $I[\sin(nx)] \rightarrow \infty$, ou seja, I não é limitado superiormente. Em verdade, é muito difícil decidir se I admite ou não algum ponto crítico que não seja nem máximo e nem mínimo. Daí, percebemos a necessidade em estabelecer condições que garantam a existência de pontos críticos mesmo para funcionais ilimitados. Os métodos conhecidos como *minimax* foram desenvolvidos justamente para provar a existência de pontos críticos que não são um mínimo ou um máximo absoluto, o qual é denominado de valor crítico do *tipo minimax*. O Teorema do Passo da Montanha, de [Ambrosetti e Rabinowitz \(1973\)](#), foi um marco na história dos métodos variacionais. Trata-se da primeira vez que se provou a existência de um ponto crítico que não um mínimo absoluto.

O termo, Passo da Montanha, surgiu da seguinte ideia: suponha que se deseja atravessar uma cadeia montanhosa com o mínimo de esforço possível. Qualquer caminho saindo da base de um lado da montanha e indo até a base do outro lado passará por um ponto cuja altitude seja máxima (para aquele caminho). A ideia é procurar, dentre todos os caminhos possíveis, um cuja altitude máxima seja mínima, daí o termo *minimax*. Matematicamente, fixados dois pontos A e B do $\mathbb{R}^2$, considere o conjunto

$$X = \{\gamma \in C^2([0, 1]; \mathbb{R}^2); \gamma(0) = A \text{ e } \gamma(1) = B\}$$

dos caminhos suaves ligando A e B . Se a função $f(x, y)$ indicar a altitude correspondente ao ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, busca-se um caminho $\gamma \in X$ em que o valor máximo de f seja o menor possível. Assim, devemos buscar uma “altura crítica” d_0 , ou seja, a menor altitude que um caminhho precisa atingir para ligar os pontos A e B . Essa altitude crítica seria

$$d_0 = \inf_{\gamma \in X} \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} |f(\gamma(t))| \right\}.$$

Claro que precisa-se remover a possibilidade em contornar a “montanha”. Uma condição para garantir isso, seria a existência de um conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ dividindo o plano em duas componentes conexas disjuntas, uma contendo A e outra contendo B , e tal que

$$\inf_{\Sigma} f > \max\{f(A), f(B)\}.$$

Por outro lado, apenas esta condição não basta, é preciso evitar, por exemplo, que o ponto crítico “escape” para o infinito. Uma tentativa seria exigir condições de decaimento ou de crescimento de f , por exemplo.

Apresentamos a condição Palais-Smale. Seja X um espaço de Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dado $c \in \mathbb{R}$, dizemos que J satisfaz a condição Palais-Smale no nível c (J satisfaz $(PS)_c$) se para qualquer

sequência $(u_n)_{n \geq 0} \subset X$ tal que $J(u_n) \rightarrow c$ e $J'(u_n) \rightarrow 0$ (em X') com $n \rightarrow \infty$, então (u_n) possui uma subsequência convergente. Dizemos que J satisfaz a condição Palais-Smale (J satisfaz (PS)) se J satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Aqui enunciamos o teorema do passo da montanha de **Ambrosetti e Rabinowitz (1973)**.

Teorema 1.26 (do Passo da Montanha).

Seja X um espaço de Banach e $J \in C^1(X; \mathbb{R})$ satisfaz (PS) , J' é localmente Lipschitziana e, além disso, J é tal que:

- (i) $J(0) = 0$;
- (ii) existem $m, r > 0$ tais que $J(u) \geq m$ quando $\|u\| = r$;
- (iii) existe $v \in X$ tal que $\|v\| > r$ e $J(v) \leq 0$, então J possui um valor crítico

$$c = \inf_{\gamma \in A} \left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} J[\gamma(t)] \right\}$$

em que $A = \{\gamma \in C([0, 1]; X); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = v\}$.

Com o teorema do passo da montanha, encerramos nossa apresentação dos aspectos fundamentais e propriedades dos espaços funcionais necessários para a plena compreensão dos nossos resultados obtidos, os quais estão em detalhes nos capítulos seguintes.

Solução Global e Comportamento Assintótico para uma Equação de Onda tipo p -Laplaciano com Memória

Open Journal of Mathematical Analysis

Vol. 2 (2018), Issue 2, pp. 156–171

ISSN: 2616-8111 (Online) 2616-8103 (Print)

DOI: 10.30538/psrp-oma2018.0025



Global solution and asymptotic behaviour for a wave equation type p -laplacian with memory

Carlos Alberto Raposo¹, Adriano Pedreira Cattai, Joilson Oliveira Ribeiro

Resumo

Estudamos a solução global, unicidade e comportamento assintótico da equação não linear.

$$u_{tt} - \Delta_p u = \Delta u - g * \Delta u$$

em que $\Delta_p u$ é o operador não linear p -Laplaciano, $p \geq 2$ e $g * \Delta u$ é um amortecimento de memória. A solução global é construída por meio das aproximações de Faedo-Galerkin levando em consideração que os dados iniciais estão num conjunto apropriado de estabilidade criado a partir da variedade de Nehari e o comportamento assintótico é obtido usando um resultado de P. Martinez baseado na nova desigualdade que generaliza os resultados de Haraux e Nakao.

Palavras-chave: Operador p -Laplaciano • Solução global • Comportamento assintótico • Memória

2.1 Introdução

Omitimos a variável espaço x de $u(x, t)$ isto é, denotamos $u(x, t)$ por $u(t)$ quando não houver confusão e c denota várias constantes positivas e podem ser diferentes em cada aparência. Consideremos os Espaços de Sobolev com suas propriedades conforme [Adams \(1997\)](#) e [BREZIS \(2010\)](#). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e limitado, $2 \leq p < \infty$ e p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. A dualidade entre o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ com seu dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. De acordo com a desigualdade de Poincaré, a norma padrão $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ é equivalente à norma $\|\nabla \cdot\|_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De agora em diante, colocamos $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla \cdot\|_p$. Denotamos $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = \|\cdot\|_2$ e o produto interno usual por $(\cdot, \cdot)$. Denotamos o operador p -Laplaciano por $\Delta_p u$, que pode ser estendido a um operador monótono, limitado, hemicontínuo e coercivo entre os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ e seu dual por

$$-\Delta_p: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega), \quad \langle -\Delta_p u, v \rangle_p = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx$$

Problemas hiperbólicos não lineares envolvendo o p -Laplaciano estão se tornando objeto de interesse crescente nos últimos anos. A existência de uma solução global para a equação de onda do tipo p -Laplaciano

$$u_{tt} - \Delta_p u = 0 \tag{2.1}$$

sem um termo de dissipação adicional é um problema aberto. Para $n = 1$, [Dreher \(2007\)](#) provou a existência da solução local no tempo e mostrou por um contra-exemplo genérico que a solução global no tempo não pode ser esperada.

Adicionando um amortecimento forte $-\Delta u_t$ em (2.1) o comportamento bem posicionado e assintótico foi estudado por [Greenberg, MacCamy e Vazel \(1968\)](#). Na verdade, o amortecimento forte desempenha um papel importante na existência e estabilidade da equação de onda tipo p -Laplaciano, ver, por exemplo, para $n \geq 2$, [Ma e Soriano \(1999\)](#), [Benaissa e Mokeddem \(2007\)](#), [Rammaha, Toundykov e Wilstein \(2012\)](#), [Pei, Rammaha e Toundykov \(2015\)](#), [Ye \(2007\)](#), [Ang e Dinh \(1988\)](#), [D'Ancona e Spagnolo \(1991\)](#). No entanto, se o amortecimento forte for substituído por um amortecimento mais fraco u_t , então a existência global e unicidade são conhecidas apenas para $n = 1; 2$, conforme [Chueshov e Lasiecka \(2006\)](#), [Zhijian \(2003\)](#). Para o amortecimento intermediário dado por $(-\Delta)^\alpha u_t$, com $0 < \alpha \leq 1$ em [Gao e Ma \(1999\)](#) foi provado a solução global dependendo do crescimento de um termo de força. O pano de fundo desses problemas está na física, especialmente na mecânica dos sólidos.

Pelo que sabemos, esta é a primeira vez que um amortecimento alternativo para a equação de onda com o operador p -Laplaciano é considerado. Neste trabalho consideramos um amortecimento da memória, atuando apenas em Δu dado pela convolução usual

$$g * \Delta u(x, t) = \int_{\Omega} g(t-s) \Delta u(x, s) \, ds$$

com o kernel g como função de valor real.

Estamos interessados em provar a existência de uma solução global e decaimento da energia para o problema

$$u_{tt} - \Delta_p u = \Delta u - g * \Delta u \quad \text{em} \quad \Omega \times [0, \infty), \quad (2.2)$$

com as condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.3)$$

e condições de fronteira

$$u(x, t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times [0, \infty). \quad (2.4)$$

Este trabalho está organizado da seguinte forma. A seção 2.2 trata do potencial do poço, em que apresentamos o conjunto de estabilidade para o problema. Na seção 2.3, apresentamos algumas notações e resultados preliminares. Na seção 2.4, apresentamos uma base Galerkin adequada. Na Seção 2.5 provamos a existência de solução pelo método Faedo-Galerkin e finalmente na Seção 2.6 usamos o resultado de Martinez (1999) que generaliza os resultados de Haraux (1985) e Nakao (1978) para provar o decaimento da energia em um conjunto apropriado de estabilidade.

2.2 O Poço Potencial

É bem conhecido que a energia de um sistema de equações diferenciais parciais é, em certo sentido, dividida em energia cinética e energia potencial. Seguindo a ideia de Ye (2007), podemos construir um conjunto de estabilidade como segue. Provaremos que existe um vale ou um “poço” de profundidade d criado na energia potencial. Se esta altura d for estritamente positiva, descobrimos que, para soluções com valores iniciais na “parte boa” do poço, a energia potencial da solução nunca escapa do poço. Em geral, é possível que a energia do termo da fonte cause a explosão em um tempo finito. Porém, na parte boa do poço ela permanece limitada. Como resultado, a energia total da solução permanece finita em qualquer intervalo de tempo $[0, T)$, que fornece a existência global da solução. Começamos apresentando o funcional $J: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g * |\nabla u|^2)(t) dx. \quad (2.5)$$

Para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ definimos o funcional

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^p}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (g * |\nabla u|^2)(t) dx, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (2.6)$$

Associado ao funcional J temos a conhecida *Variedade de Nehari* dada por

$$\mathcal{N} := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) / \{0\}; \left[\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) \right]_{\lambda=1} = 0 \right\}.$$

De (2.6), obtemos

$$\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) = \lambda^{p-1} \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g * |\nabla u|^2)(t) dx,$$

então

$$\mathcal{N} := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) / \{0\}; \|\nabla u\|_p^p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g * |\nabla u|^2)(t) dx \right\}.$$

Definimos, como no teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz (1973),

$$d := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) / \{0\}} \sup_{0 \leq \lambda} J(\lambda u).$$

Sabemos que a profundidade do poço d é uma constante estritamente positiva, conforme Willem (1996), Teorema 4.2, e que

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

Na verdade, em nosso problema, a solução de $\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) = 0$ é

$$\lambda_* = \left[\frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (g * |\nabla u|^2)(t) dx}{\|\nabla u\|_p^p} \right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Como temos

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} J(\lambda u) = (p-1)\lambda^{p-2}\|\nabla u\|_p^p > 0,$$

segue que λ_* é um mínimo global.

Para $p \geq 2$, $J(\lambda_* u) < 0$, introduzimos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega); J(\lambda_* u) \leq J(\lambda u) \leq 0 \right\}, \\ \mathcal{W}_2 &= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega); 0 < J(\lambda u) \right\}. \end{aligned}$$

O potencial do poço é definido por $\mathcal{W} = \{u \in W_0^{1,p}; J(u) < d\} \cup \{0\}$ e particionado em dois conjuntos

$$\begin{aligned} V &= \left\{ u \in \mathcal{W}; \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g * |\nabla u|^2)(t) dx \leq \|\nabla u\|_p^p \right\} \cup \{0\}, \\ W &= \left\{ u \in \mathcal{W}; \|\nabla u\|_p^p < \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g * |\nabla u|^2)(t) dx \right\}. \end{aligned}$$

Iremos nos referir a V como a parte “boa” do poço e W como a parte “ruim” do poço. Assim, definimos por V o conjunto de estabilidade para o problema (2.2)–(2.4).

2.3 Preliminares

Introduzimos os símbolos “ $\square$ ” e “ $\diamond$ ” que denotam, respectivamente, as seguintes convoluções:

$$(g \square h)(t) := \int_0^t g(t-s) |h(t) - h(s)|^2 ds,$$

$$(g \diamond h)(t) := \int_0^t g(t-s) (h(t) - h(s)) ds.$$

Temos dois resultados básicos, conforme Alves et al. (2010), que serão usados a seguir.

Lema 2.1.

Para $g, h \in C([0, \infty], \mathbb{R})$ temos

$$(g * h)(t) = \left(\int_0^t g(s) ds \right) h(t) - (g \diamond h)(t)$$

$$|(g \diamond h)(t)|^2 \leq \left(\int_0^t |g(s)| ds \right) (|g| \square h)(t)$$

Lema 2.2.

Para $g, h \in C([0, \infty], \mathbb{R})$ temos

$$2(g * h)(t)h'(t) = (g' \square h)(t) - g(t)|h(t)|^2 + \frac{d}{dt} \left[\left(\int_0^t g(s) ds \right) |h(t)|^2 - (g \square h)(t) \right]$$

A partir de agora, a função g é do tipo exponencial, isto é, $g > 0$ e $\exists c_i > 0$, ($i = 0; 1$) tal que

$$-c_0 g(t) \leq g'(t) \leq -c_1 g(t) \quad \text{e} \quad 1 - \int_0^\infty g(t) dt < \infty. \quad (2.7)$$

A energia do problema (2.2)-(2.4) é definida por

$$E(t) := \frac{1}{2} |u'(t)|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u(t)\|_p^p + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) |\nabla u(t)|_2^2 + \frac{1}{2} (g \square \nabla u)(t).$$

Apresentamos aqui o resultado de P. Martinez (MARTINEZ, 1999) nas estimativas da taxa de decaimento para o sistema dissipativo que será usado na seção 2.6 Comportamento Assintótico.

Lema 2.3.

Seja $E: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função não crescente e $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função crescente tal que

$$\phi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(t) \rightarrow +\infty \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Suponha que existam $q \geq 0$ e $A > 0$ de modo que

$$\int_S^{+\infty} E(t)^{q+1} \phi'(t) dt \leq AE(S), \quad 0 \leq S < +\infty.$$

Então, temos

$$E(t) \leq cE(0) (1 + \phi(t))^{-\frac{1}{q}}, \quad \forall t \geq 0 \text{ se } q > 0$$

e

$$E(t) \leq cE(0) e^{-w\phi(t)}, \quad \forall t > 0 \text{ se } q = 0,$$

em que c e w são constantes positivas independentes da energia inicial $E(0)$.

2.4 Base de Galerkin

Denote por

$$\mathcal{K}_j = \{K \subset \{u \in L^p(\Omega); \|u\|_p = 1\}; K \text{ é compacto, simétrico e } \gamma(K) \geq j\},$$

em que $\gamma(G) = \inf\{m; \exists \phi; G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \phi \text{ função contínua e ímpar}\}$ denota o gênero de Krasnoselskii. Em [Coffman \(1973\)](#) está provado que

$$\lambda_j = \inf_{G \in \mathcal{K}_j} \sup_{u \in G} \|\nabla u\|_p^p$$

é uma sequência de autovalores do operador p -Laplaciano $-\Delta_p: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, que é um operador monótono, coercivo e hemicontínuo em $W_0^{1,p}(\Omega)$. O teorema de Minty-Browder, ver [Zeidler \(1990\)](#), garante a existência de uma base $(w_j)_{j=1}^\infty$ para $W_0^{1,p}(\Omega)$ dada pela solução do problema estacionário

$$\begin{cases} -\Delta_p w_j &= \lambda_j w_j, \\ w_j(0) &= w_{0j}. \end{cases}$$

Usando

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad (2.8)$$

com imersão contínua e densa para $1 < p < \infty$, conforme em [BREZIS \(2010\)](#), esta base pode ser estendida em $L^2(\Omega)$ como uma base de Galerkin para o operador p -Laplaciano.

Na verdade, da imersão em Sobolev, temos

$$W_0^{v,q}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{v-k,q_k}(\Omega), \quad \frac{1}{q_k} = \frac{1}{q} - \frac{k}{n}.$$

Escolhendo $q_k = p$, $v - k = 1$ e $q = 2$ temos

$$v = 1 + \frac{n}{2} - \frac{n}{p} = 1 + \frac{n(p-2)}{2p} > 0$$

obtendo um espaço de Hilbert $H_0^v(\Omega)$ tal que

$$H_0^v(\Omega) = W_0^{v,2}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega).$$

Seja s um inteiro para o qual $s > v$. Temos

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Pelo teorema de Rellich-Kondrachov $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta, então também temos a imersão $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Da teoria espectral, existe um operador definido por

$$\left\{ H_0^s(\Omega), L^2(\Omega), ((\cdot, \cdot))_{H_0^s(\Omega)} \right\}$$

e uma sequência de autovetores $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ deste operador, de modo que

$$((v_j, v))_{H_0^s(\Omega)} = \lambda_j (v_j, v), \quad \forall v \in H_0^s(\Omega)$$

com $\lambda_j > 0$, $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$, e $\lambda_j \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow +\infty$. Além disso $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$ e $\left(w_j = \frac{v_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right)_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^s(\Omega)$. Então $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ fornece uma “base de Galerkin” para $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$.

2.5 Solução Global

2.5.1 Existência

Teorema 2.4.

Dados $u_0 \in V$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$, existe uma função $u: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{q.s. em } \Omega, \\ \frac{d}{dt}(u_t, v) + \langle -\Delta_p u, v \rangle_p + (-\Delta u, v) + (g * \Delta u, v) &= 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ em } D'(0, T). \end{aligned}$$

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$, vamos colocar $V_m = \text{Span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Procuramos por uma função $u_m(t) = \sum_{j=1}^m k_{jm}(t) w_j$ tal que, para qualquer $v \in V_m$, $u_m(t)$ satisfaz a equação aproximada

$$(u_m''(t), v) + \langle -\Delta_p u_m(t), v \rangle_p + (-\Delta u_m(t), v) + (g * \Delta u_m(t), v) = 0, \quad (2.9)$$

com as seguintes condições iniciais $u_m(0) = u_{0m}$ e $u_m'(0) = u_{1m}$, em que u_{0m} e u_{1m} são fechados em V_m de modo que

$$u_{0m} \rightarrow u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Colocando $v = w_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, e usando

$$\begin{aligned} u_m''(t) &= \sum_{j=1}^m k_{jm}''(t) w_j(x), \\ \Delta u_m(t) &= \sum_{j=1}^m k_{jm}(t) \Delta w_j(x), \\ \Delta_p u_m(t) &= \sum_{j=1}^m k_{jm}(t) \Delta_p w_j(x), \\ (g * \Delta u_m)(t) &= \sum_{j=1}^m (g * k_{jm})(t) \Delta w_j(x), \end{aligned}$$

observamos que (2.9) é um sistema de EDOs na variável t e possui uma solução local $u_m(t)$ no intervalo $[0, t_m)$, em virtude do teorema de Carathéodory, conforme [Coddington e Levinson \(1955\)](#). No próximo passo obtemos estimativas a priori para a solução $u_m(t)$ de forma que ela possa ser estendida a todo o intervalo $[0, T]$, $T > 0$.

Estimativas a Priori: Substituímos $v = u_m'(t)$ na equação aproximada (2.9) e temos

$$(u_m'(t), u_m'(t)) - \langle \Delta_p u_m(t), u_m'(t) \rangle_p - (\Delta u_m(t), u_m'(t)) + (g * \Delta u_m(t), u_m'(t)) = 0. \quad (2.10)$$

Seja $\theta \in D(0, t_m)$. Denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre D' e D . Então temos,

$$\langle (u_m''(t), u_m'(t)), \theta \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|_2^2, \theta \right\rangle \quad (2.11)$$

$$\langle \langle -\Delta_p u_m(t), u_m'(t) \rangle_p, \theta \rangle = \left\langle \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_p^p, \theta \right\rangle \quad (2.12)$$

$$\langle (-\Delta u_m(t), u_m'(t)), \theta \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u_m(t)|_2^2, \theta \right\rangle \quad (2.13)$$

Note que

$$(g * \Delta u_m(t), u_m'(t)) = -((g * \nabla u_m)(t), \nabla u_m'(t)).$$

Pelo Lema 2.2 temos

$$\begin{aligned} 2((g * \nabla u_m)(t), \nabla u_m'(t)) &= \int_{\Omega} (g' \square \nabla u_m)(t) dx - g(t) \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left[(g \square \nabla u_m)(t) - \left(\int_0^t g(s) ds \right) |\nabla u_m(t)|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle (g * \Delta u_m(t), u_m'(t)), \theta \rangle &= \left\langle -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' \square \nabla u_m)(t) dx + \frac{1}{2} g(t) |\nabla u_m(t)|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (g \square \nabla u_m)(t) dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) |\nabla u_m(t)|_2^2, \theta \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Substituindo (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) em (2.10), obtemos em $D'(0, t_m)$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} |u_m'(t)|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u_m(t)\|_p^p + \frac{1}{2} (g \square \nabla u_m)(t) + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) |\nabla u_m(t)|_2^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g' \square \nabla u_m)(t) dx - \frac{1}{2} g(t) |\nabla u_m(t)|_2^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

A energia aproximada

$$E_m(t) = \frac{1}{2} |u_m'(t)|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u_m(t)\|_p^p + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) |\nabla u_m(t)|_2^2 + \frac{1}{2} (g \square \nabla u_m)(t)$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt} E_m(t) \leq -\frac{c_1}{2} \int_{\Omega} (g \square \nabla u_m)(t) dx - \frac{1}{2} g(t) |\nabla u_m(t)|_2^2.$$

Então $E_m(t) \leq E_m(0)$. Da convergência dos dados iniciais, existe uma constante $c > 0$, independente de t e m , tal que $E_m(t) \leq c$. Com esta estimativa, podemos estender a solução aproximada $u_m(t)$ no intervalo $[0, T]$, conforme Hale (1997) e, temos

$$u_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (2.16)$$

$$u_m'(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.17)$$

$$-\Delta_p u_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)). \quad (2.18)$$

De (2.16) e do Lema 2.1 deduzimos

$$(g * \nabla u_m)(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.19)$$

Passagem do Limite: De (2.16), (2.17), (2.19), indo para a subsequência se necessário, existe u tal que

$$u_m \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad (2.20)$$

$$u'_m \xrightarrow{*} u' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.21)$$

$$g * \nabla u_m \xrightarrow{*} g * \nabla u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.22)$$

e, de (2.18), existe $\mathcal{X}$ tal que

$$-\Delta_p u_m(t) \rightharpoonup \mathcal{X} \text{ em } L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)). \quad (2.23)$$

Com essas convergências podemos passar o limite na equação aproximada (2.9), conforme Lions (1988), Zhijian (2009), e então

$$\frac{d}{dt} (u'(t), v) + \langle \mathcal{X}(t), v \rangle_p + (-\Delta u(t), v) + (g * \nabla u)(t), v) = 0,$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no sentido das distribuições.

Para $x, y \in \mathbb{R}$ e $p \geq 2$, considere as desigualdades elementares

$$\left| |x|^{\frac{p-2}{2}} x - |y|^{\frac{p-2}{2}} y \right| \leq C \left(|x|^{\frac{p-2}{2}} + |y|^{\frac{p-2}{2}} \right) |x - y|, \quad (2.24)$$

$$|x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y \leq C \left(|x|^{\frac{p-2}{2}} + |y|^{\frac{p-2}{2}} \right) \left| |x|^{\frac{p-2}{2}} x - |y|^{\frac{p-2}{2}} y \right|. \quad (2.25)$$

A desigualdade (2.24) é uma consequência do teorema do valor médio e (2.25) pode ser encontrada em Domokos e Manfredi (2009). Como em Raposo, Ribeiro e Cattai (2018) aplicando (2.24), (2.25) e a desigualdade generalizada de Hölder, com

$$\frac{p-2}{4p} + \frac{p-2}{4p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = 1$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, deduzimos

$$\left| \int_0^T \langle -\Delta_p u_m(t), v \rangle_p - \langle -\Delta_p u(t), v \rangle_p dt \right| \leq c \int_0^T |\nabla u_m(t) - \nabla u(t)|_2 dt.$$

Vamos obter uma estimativa para $u_m''(t)$. Como nossa base de Galerkin foi obtida no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, podemos usar os argumentos padrão de projeção descritos em Lions (1988). Então, a partir da equação aproximada e das estimativas (2.16) - (2.18), obtemos

$$u_m''(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; W^{-1,q}(\Omega)). \quad (2.26)$$

Aplicando a compacidade de Lions-Aubin, obtemos de (2.20), (2.21) e (2.26),

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.27)$$

$$u'_m(t) \rightarrow u'(t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.28)$$

Usando (2.27) obtemos que $u_m(t) \rightarrow u(t)$ quase sempre em $\Omega \times (0, T)$ e, obtemos

$$-\Delta_p u_m(t) \rightharpoonup -\Delta_p u(t) \text{ em } L^\infty(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)). \quad (2.29)$$

De (2.23), (2.29) e unicidade do limite, concluímos que $\mathcal{X}(t) = -\Delta_p u(t)$. A verificação dos dados iniciais é um procedimento de rotina. A prova da existência está completa. $\square$

2.5.2 Unicidade

Sejam u e v soluções de (2.2)–(2.4) tais que

$$u(x, 0) = u_0 = v(x, 0) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = u_1 = v_t(x, 0).$$

Denotando $w = u - v$, temos

$$u_{tt} - \Delta w = \Delta_p u - \Delta_p v - g * \Delta w, \text{ em } \Omega \times [0, \infty), \quad (2.30)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.31)$$

$$w(x, t) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, \infty). \quad (2.32)$$

Usaremos o método Višik-Ladyenskaya (VISHIK; LADYZHENSKAYA, 1956). Considere, para cada $\eta \in [0, T]$, a seguinte função

$$\psi(x, t) = \begin{cases} -\int_t^\eta w(x, \xi) d\xi & , \quad 0 \leq t < \eta, \\ 0 & , \quad \eta \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.33)$$

Então,

$$\psi_t(x, t) = \begin{cases} w(x, t) & , \quad 0 \leq t < \eta, \\ 0 & , \quad \eta \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.34)$$

Como $w \in L^\infty(0, T; W_0^{1, p}(\Omega))$, $w_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ temos

$$\psi, \psi_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.35)$$

Multiplicando (2.30) por ψ e integrando em Ω , temos

$$(w_{tt}, \psi) + (\nabla w, \nabla \psi) = \langle \Delta_p u - \Delta_p v, \psi \rangle_p - (g * \Delta w, \psi).$$

Integrando em $[0, \eta]$ e considerando que $\psi(x, t) \equiv 0$ para todo $t \in [\eta, T]$, temos

$$\int_0^\eta (w_{tt}, \psi) dt + \int_0^\eta (\nabla w, \nabla \psi) dt = \int_0^\eta \langle \Delta_p u - \Delta_p v, \psi \rangle_p dt - \int_0^\eta (g * \Delta w, \psi) dt.$$

Como $\psi(\eta) = w(0) = 0$, temos

$$-\int_0^\eta (w_t, \psi_t) dt + \int_0^\eta (\nabla w, \nabla \psi) dt = \int_0^\eta \langle \Delta_p u - \Delta_p v, \psi \rangle_p dt - \int_0^\eta ((g * \Delta w)(t), \psi) dt.$$

De (2.32), (2.33) e (2.34)

$$-\int_0^\eta (w_t, w) dt + \int_0^\eta (\nabla \psi_t, \nabla \psi) dt = \int_0^\eta \langle \Delta_p u - \Delta_p v, \psi \rangle_p dt - \int_0^\eta (g * \Delta w, \psi) dt.$$

Isto é,

$$-\frac{1}{2} \int_0^\eta \frac{d}{dt} |w|_2^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\eta \frac{d}{dt} |\nabla \psi|_2^2 dt = \int_0^\eta \langle \Delta_p u - \Delta_p v, \psi \rangle_p dt - \int_0^\eta ((g * \Delta w)(t), \psi) dt,$$

que implica

$$-\frac{1}{2} |w(\eta)|_2^2 - \frac{1}{2} |\nabla \psi(0)|_2^2 \leq \int_0^\eta \langle \Delta_p u - \Delta_p v, \psi \rangle_p dt - \int_0^\eta ((g * \Delta w)(t), \psi) dt \quad (2.36)$$

Como antes, aplicando (2.24), (2.25) e a desigualdade generalizada de Hölder com

$$\frac{p-2}{4p} + \frac{p-2}{4p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2} = 1$$

obtemos

$$|\langle \Delta_p u - \Delta_p v, \psi \rangle_p| \leq c |\nabla \psi|_2. \quad (2.37)$$

De (2.35) e da imersão contínua e densa (2.8) deduzimos que $g * \Delta w \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Então

$$\left| \int_\Omega (g * \Delta w)(t) \psi dx \right| \leq \left(\int_\Omega |g * \Delta w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c |\psi|_2. \quad (2.38)$$

De (2.36), (2.37), (2.38), e das desigualdades de Poincaré e Cauchy-Schwarz, deduzimos

$$\frac{1}{2} |w|_2^2 + \frac{1}{2} |\nabla \psi(0)|_2^2 \leq c \int_0^\eta |\nabla \psi|_2^2 dt. \quad (2.39)$$

Introduzindo $w_1(x, t) = \int_0^t w(x, \xi) d\xi$, para todo $t \in [0, \xi]$, temos

$$\psi(x, t) = - \int_0^\eta w(x, \xi) d\xi = - \int_0^\eta w(x, \xi) d\xi + \int_0^t w(x, \xi) d\xi = w_1(x, t) - w_1(x, \eta), \quad (2.40)$$

e então

$$\psi(x, 0) = w_1(x, 0) - w_1(x, \eta) = -w_1(x, \eta). \quad (2.41)$$

De (2.39), 2.40 e (2.41) obtemos

$$\frac{1}{2} |\nabla w_1|_2^2 \leq c \int_0^\eta |\nabla w_1|_2^2 dt.$$

Pela inequação de Gronwall concluímos que $|\nabla w_1|_2^2 \leq 0$. Por (2.40) temos que $\nabla \psi = 0$ em $L^2(\Omega)$ para todo $t \in [0, T]$. Finalmente, segue de (2.39) que $|w|_2^2 \leq 0$ e, então $u = v$ em $L^2(\Omega)$ para todo $t \in [0, T]$.

2.6 Comportamento Assintótico

Teorema 2.5.

Seja u uma solução de (2.2)–(2.4) com condições iniciais $u_0 \in V$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Para $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função C^2 e crescente tal que $\phi(0) = 0$ e $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ temos, para $q > 0$,

$$E(t) \leq cE(0)(1 + \phi(t))^{\frac{-1}{q}}, \quad \forall t > 0 \quad (2.42)$$

em que c é uma constante positiva independente da energia inicial $E(0)$.

Demonstração. Usaremos o Lema 2.3 devido a Martínez (1999) baseado em uma nova desigualdade que generaliza um resultado de Haraux (1985). Para o objetivo, começamos a prova de (2.42) multiplicando (2.2) por $E^q(t)\phi'(t)u$ e assim definimos

$$\int_0^T E^q \phi' \int_{\Omega} u(u_{tt} - \Delta_p u - \Delta u + g * \Delta u) dx dt = 0,$$

de onde obtemos por cálculos diretos

$$\begin{aligned} 2 \int_S^T E^{q+1} \phi' dt &\leq - \left[E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx \right]_S^T + 4 \int_S^T \left[(qE' E^{q-1} \phi' + E^q \phi'') \int_{\Omega} uu_t dx \right] dt \\ &\quad + 4 \int_S^T \left[E^q \phi' \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right] dt + \int_S^T \left[E^q \phi' \frac{1}{2} \int_{\Omega} g \square \nabla u dx \right] dt \\ &\quad + \int_S^T \left[E^q \phi' \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \right] dt \\ &\quad + \int_S^T \left[E^q \phi' \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \int_0^T g(t-s) ds \right] dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

No conjunto de estabilidade V temos

$$\frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds \leq \frac{1}{p} \|\nabla u(s)\|_p^p. \quad (2.44)$$

substituindo (2.44) em (2.43) obtemos

$$\begin{aligned} \int_S^T E^{q+1} \phi' dt &\leq - \left[E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx \right]_S^T + \int_0^T \left[(qE' E^{q-1} \phi' + E^q \phi'') \int_{\Omega} uu_t dx \right] dt \\ &\quad + \frac{3}{2} \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Agora, vamos estimar cada termo no lado direito de (2.45). Aplicando o mesmo argumento que em Benaissa e Mokeddem (2007) deduzimos

$$\left| \left[E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx \right]_S^T \right| \leq cE(s), \quad \forall t \geq S \quad (2.46)$$

e

$$\left| \int_S^T \left[(qE' E^{q-1} \phi' + E^q \phi'') \int_{\Omega} uu_t dx \right] dt \right| \leq cE(s), \quad \forall t \geq S. \quad (2.47)$$

A estimativa de $\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt$ é bastante delicada. Seja $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função estritamente positiva tal que $\int_0^\infty \sigma(t) dt = +\infty$. $\phi(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau$ satisfaz $\phi(0) = 0$ e $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Considere $\rho(t, u) \leq -E'(t)$.

De acordo com [Benaissa e Mokeddem \(2007\)](#) para todo $0 < S < T$ e $l < m + 1$

$$\begin{aligned} \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} |u_t|^l dx dt &\leq c \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma(t)} u_t \rho(t, u) dx dt \\ &\quad + c' \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\sigma(t)} u_t \rho(t, u) \right)^{\frac{l}{m+1}} dx dt \\ &\leq c \int_S^T E^q \frac{\phi'}{\sigma(t)} (-E') \int_{\Omega} |u'| dx dt \\ &\quad + c' \int_S^T E^q \phi' \sigma^{-\frac{l}{m+1}}(t) (-E')^{\frac{l}{m+1}} \int_{\Omega} |u'|^{\frac{l}{m+1}} dx dt. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, usando $l < m + 1$, $|u'|_2^2 < c$ temos

$$\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} |u_t|^l dx dt \leq c \int_S^T E^q \frac{\phi'}{\sigma(t)} (-E') dt + c' \int_S^T E^q \phi'^{\frac{m+1-l}{m+1}} \left(\frac{\phi'}{\sigma(t)} \right)^{\frac{l}{m+1}} (-E')^{\frac{l}{m+1}} dt.$$

Para fixo e arbitrariamente pequeno $\varepsilon > 0$ (a ser escolhido mais tarde). Aplicando a desigualdade de Young $\frac{1}{\frac{m+1}{m+1-l}} + \frac{1}{\frac{m+1}{l}} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} |u_t|^l dx dt &\leq c \int_S^T E^q \frac{\phi'}{\sigma(t)} (-E') dt + c' \frac{m+1-l}{m+1} \varepsilon^{\frac{m+1}{m+1-l}} \int_S^T E^q \frac{m+1}{m+1-l} \phi' dt \\ &\quad + c' \frac{l}{m+1} \int_{\Omega} (-E') \frac{\phi'}{\sigma(t)} \varepsilon^{-\frac{m+1}{l}} dt. \end{aligned}$$

De onde segue

$$\begin{aligned} \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} |u_t|^l dx dt &\leq c E^q(s) + c' \frac{m+1-l}{m+1} \varepsilon^{\frac{m+1}{m+1-l}} \int_S^T E^q \frac{m+1}{m+1-l} \phi' dt \\ &\quad + c' \frac{l}{m+1} \varepsilon^{-\frac{m+1}{l}} E(s). \end{aligned}$$

Fazendo $l = 2$, $\rho(t, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (g \square \nabla u)(t) dx$ e escolhendo q tal que $\frac{m+1}{m+1-l} = \frac{q+1}{q}$ obtemos

$$\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt \leq c E(s) + c \frac{m-2}{m+1} \varepsilon^{\frac{m+1}{m-1}} \int_S^T E^{q+1} \phi' dt + \frac{2c}{m+1} \varepsilon^{-\frac{m+1}{2}} E(s) \quad (2.48)$$

Deduzimos de (2.45), (2.46), (2.47) e (2.48)

$$\left(1 - c \frac{m-1}{m+1} \varepsilon^{\frac{m+1}{m-1}} \right) \int_S^T E^{q+1} \phi' dt \leq c(\varepsilon) E(s).$$

Finalmente, escolhendo ε pequeno o suficiente, concluímos

$$\int_S^T E^{q+1} \phi' dt \leq c E(s), \quad q > 0.$$

Portanto, a prova está completa. □

Considerações finais

Para $p = 2$, é bem conhecido que a [Equação 2.2](#) descreve um sólido viscoelástico isotrópico e homogêneo e a memória genuína $g * \Delta u$ induz um mecanismo de amortecimento para que a estabilidade assintótica é esperada. Por exemplo, para o problema não homogêneo com a função f independente do tempo e do termo de origem, a existência de um atrator global foi provada em [Giorgi e Rivera \(2001\)](#). O problema com a fonte supercrítica e com os termos de amortecimento foi estudado em [Guo et al. \(2014\)](#). Empregando a teoria de operadores monótonos e semigrupos não lineares, combinada com métodos de energia, estabeleceu-se a existência de uma solução fraca local única no espaço de energia finita. Como trabalho de acompanhamento, recentemente em [Guo, Rammaha e Sakuntasathien \(2017\)](#), foi considerada não linearidade supercrítica e foi estudada explosão de soluções quando a fonte é mais forte que a dissipação. Para o caso $p > 2$, a [Equação 2.2](#), não linear, leva a um problema não considerado anteriormente. O destaque aqui foi provar a existência de solução e decaimento da energia no conjunto apropriado de estabilidade criado a partir da Superfície de Nehari.

Sistema acoplado de equações de ondas tipo p -Laplaciano

Poincare Journal of Analysis & Applications
 Vol. 7, No. 2 (2020), 185-195
 ©Poincare Publishers
 DOI:10.46753/pjaa.2020.v07i02.004



WAVE COUPLED SYSTEM OF THE p -LAPLACIAN TYPE

DUCIVAL C. PEREIRA, CARLOS A. RAPOSO[†], CELSA H. M. MARANHÃO,
 AND ADRIANO P. CATTAL

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de solução e o comportamento assintótico para um sistema acoplado não linear de equações de ondas do tipo p -Laplaciano dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta_p u + |u|^{r-1} u |v|^{r+1} - \Delta u' &= 0 \quad \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ v'' - \Delta_p v + |v|^{r-1} v |u|^{r+1} - \Delta v' &= 0 \quad \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ (u(x, 0), v(x, 0)) &= (u_0(x), v_0(x)) \quad \text{em } \Omega, \\ (u'(x, 0), v'(x, 0)) &= (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em } \Omega, \\ u(x, t) = v(x, t) &= 0 \quad \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \end{array} \right.$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto com fronteira Γ suficientemente suave. A existência de solução é feita usando aproximações de Faedo-Gallerkin. Provamos a estabilidade exponencial quando $p = 2$ e decaimento polinomial se $p > 2$ baseado em Nakao (1978), NAKAO e KUWAHARA (1987).

Palavras-chave: Operador p -Laplaciano • Solução global • Comportamento assintótico.

3.1 Introdução

Ao longo de todo o texto, omitimos a variável de espaço x de $u(x, t)$, denotando simplesmente $u(x, t)$ por $u(t)$ sempre que não houver conflitos, C denota várias constantes positivas dependendo das constantes conhecidas e pode ser diferente em cada aparência. Seja $T > 0$ um número real, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente suave. Denotamos por $Q = \Omega \times (0, T)$ o cilindro com fronteira $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Consideramos $2 \leq p < \infty$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. A dualidade entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ e seu dual $W^{-1,q}(\Omega)$ será denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. De acordo com a desigualdade de Poincaré, a norma padrão $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ é equivalente à norma $\|\nabla \cdot\|_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim, colocamos $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla \cdot\|_p$. Denotamos $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = |\cdot|_2$ e o produto interno usual por $(\cdot, \cdot)$. Denote o operador p -Laplaciano por $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, o qual pode ser estendido a um operador monótono, limitado, hemicontínuo e coercitivo entre os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ e seu dual

$$-\Delta_p: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,q}(\Omega), \quad \langle -\Delta_p u, v \rangle_p = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

A existência de uma solução global para equação de onda do tipo p -Laplaciano

$$u'' - \Delta_p u = 0 \tag{3.1}$$

sem qualquer termo de dissipação adicional é um problema em aberto. Para $n = 1$, [Dreher \(2007\)](#) provou a existência de solução local e demonstrou, usando um exemplo, que não existe solução global. Adicionando um amortecimento forte $-\Delta u'$ em (3.1) o comportamento bem posicionado e assintótico foi estudado por [Greenberg, MacCamy e Vize \(1968\)](#). Soluções fracas e explosão em tempo finito para equações de onda tipo p -Laplaciano, com fontes supercríticas, foram consideradas em [Pei, Rammaha e Toundykov \(2015\)](#). Ma e Soriano ([MA; SORIANO, 1999](#)) forneceram a solução fraca para o problema com um termo de fonte dissipativa $g(u)$ em que $g(u)u \geq 0$ tem limite de crescimento. No entanto, se o amortecimento forte for substituído por um amortecimento mais fraco u' , então a existência global e a unicidade são conhecidas apenas por $n = 1; 2$, conforme os trabalhos de [Chueshov e Lasiecka \(2006\)](#) e [Zhijian \(2003\)](#). Em ([GAO; MA, 1999](#)), Gao e Ma analisaram a existência de solução com o amortecimento $(-\Delta)^\alpha u'$ com $0 < \alpha \leq 1$ e estendeu o resultado de [Ma e Soriano \(1999\)](#) para $g(u)$ sem a condição de sinal $g(u)u \geq 0$. Na verdade, os autores lidam com a seguinte formulação

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta_p u + g(x, u) - (\Delta)^\alpha u' &= f(x, t) \quad \text{em } Q, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u'(x, 0) &= u_1(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u(x, t) &= 0 \quad \text{em } \Sigma, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

em que $f \in L^2(0, T; W^{-1,q}(\Omega))$ sendo $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a condição de crescimento

$$|g(x, u)| \leq a|u|^{r-1} + b, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

com a e b constantes positivas e

$$1 < r < \frac{np}{n-p} \text{ se } n > p \text{ e } 1 < r < +\infty \text{ se } n \leq p. \quad (3.3)$$

O sistema acoplado de ondas tem sido considerado em vários contextos. Em [Komornik e Rao \(1997\)](#), ambas as equações de ondas são amortecidas no bordo e o acoplamento é efetuado pelo operador compacto e a estabilidade exponencial é obtida quando o amortecimento do bordo é linear. O amortecimento do bordo também é considerado em [Aassila \(2001\)](#). Sobre a controlabilidade de fronteira exata para equações de ondas linearmente acopladas, citamos [Bastos, Spezamiglio e Raposo \(2011\)](#). Para ação de amortecimento fraco, apenas numa equação, o decaimento polinomial ótimo para equações de ondas acopladas, foi estudada em [Lobato et al. \(2014\)](#). Em [Alabau \(1999\)](#), foi provado que a energia associado ao sistema acoplado fracamente dissipativo decai polinomialmente com taxas de decaimento polinomial explícitas para soluções suficientemente suaves. Decaimento exponencial para equações de ondas acopladas com amortecimento distribuído localmente foi dado em [Raposo e Bastos \(2009\)](#). A estabilidade exponencial uniforme foi dada em [Najafi \(2001\)](#) para equações de ondas acopladas em paralelo com molas distribuídas de acoplamento e amortecedores viscosos devido a diferentes condições de contorno e velocidades de propagação de onda. A falta de decaimento exponencial de um sistema acoplado de equações de onda com memória foi tratada em [Almeida e Santos \(2011\)](#).

O termo de amortecimento $-\Delta u'$ desempenha um papel essencial para a obtenção de soluções globais. Por exemplo, o problema

$$\begin{cases} u'' - \Delta_p u + |u|^{r-1}u - \Delta u' = 0 & \text{em } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \\ u'(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{em } \Sigma, \end{cases} \quad (3.4)$$

pode ser derivado de (3.2) e tem uma solução global $u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ quando $u_0(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$ e a condição (3.3) é válida.

Neste trabalho estamos interessados em provar a existência e o decaimento da energia para o seguinte sistema acoplado não linear

$$\begin{cases} u'' - \Delta_p u + |u|^{r-1}u|v|^{r+1} - \Delta u' = 0 & \text{em } Q, \\ v'' - \Delta_p v + |v|^{r-1}v|u|^{r+1} - \Delta v' = 0 & \text{em } Q, \end{cases} \quad (3.5)$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned} (u(x, 0), v(x, 0)) &= (u_0(x), v_0(x)) & \text{em } Q \\ (u'(x, 0), v'(x, 0)) &= (u_1(x), v_1(x)) & \text{em } Q \end{aligned}$$

e condições de bordo

$$u(x, t) = v(x, t) = 0 \text{ em } \Sigma.$$

A estrutura matemática está assim organizada. Na seção 3.2, as soluções globais são contruídas por meio das aproximações de Galerkin, enquanto na seção 3.3 aplicamos resultados devido a M. Nakao (NAKAO, 1978; NAKAO; KUWAHARA, 1987) para provar a estabilidade exponencial quando $p = 2$ e o decaimento polinomial se $p > 2$.

3.2 Existência de Solução

Teorema 3.1.

Vamos supor que $1 < r < \frac{np}{n-p}$ se $n > p$ e $1 < r < +\infty$ se $n \leq p$, com $r+1 < p$. Então, dados $(u_0, v_0) \in [W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega)]^2$, $(u_1, v_1) \in [L^2(\Omega)]^2$, $p \geq 2$, existem funções $u, v: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que,

$$(u, v) \in [L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^{r+1}(\Omega))]^2, \quad (3.6)$$

$$(u', v') \in [L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))]^2, \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt}(u', w) + \langle -\Delta_p u, w \rangle + (|u|^{r-1} u |v|^{r+1}, w) + (\nabla u', \nabla w) = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt}(v', z) + \langle -\Delta_p v, z \rangle + (|v|^{r-1} v |u|^{r+1}, z) + (\nabla v', \nabla z) = 0, \quad (3.9)$$

$$\forall w, z \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ em } D'(0, T),$$

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0), \quad (u'(0), v'(0)) = (u_1, v_1) \quad (3.10)$$

Demonstração. Da imersão de Sobolev, temos

$$W_0^{v,q}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{v-k,q_k}(\Omega), \quad \frac{1}{q_k} = \frac{1}{q} - \frac{k}{n}.$$

Escolhendo $q_k = p$, $v - k = 1$, e $q = 2$, temos

$$v = 1 + \frac{n}{2} - \frac{n}{p} = 1 + \frac{n(p-2)}{2p} > 0$$

e obtemos um espaço de Hilbert $H_0^v(\Omega)$ tal que

$$H_0^v(\Omega) = W_0^{v,2}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega).$$

Seja s um inteiro para o qual $s > v$. Temos

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

De acordo com o teorema de Rellich-Kondrachov, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta, assim também é a imersão $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Da teoria espectral, existe um operador definido por

$$\left\{ H_0^s(\Omega), L^2(\Omega), ((\cdot, \cdot))_{H_0^s(\Omega)} \right\}$$

e uma sequência de auto-vetores $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ deste operador de modo que

$$((v_j, v))_{H_0^s(\Omega)} = \lambda_j(v_j, v), \quad \forall v \in H_0^s(\Omega)$$

com $\lambda_j > 0$, $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$, e $\lambda_j \rightarrow +\infty$ com $j \rightarrow +\infty$. Ademais $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$ e $\left(w_j = \frac{v_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^s(\Omega)$. Então $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ fornece uma “base de Galerkin” para $W_0^{1,p}(\Omega)$ e para $L^2(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, colocamos $V_m = \text{Span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Buscamos por funções

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m k_{jm}(t) w_j, \quad v_m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t) w_j,$$

tais que, quaisquer $w, z \in V_m$, $u_m(t)$ e $v_m(t)$ satisfazem o seguinte problema aproximado

$$(u_m''(t), w) + \langle -\Delta_p u_m(t), w \rangle + (|u_m(t)|^{r-1} u_m(t) |v_m(t)|^{r+1}, w) + (\nabla u_m'(t), \nabla w) = 0, \quad (3.11)$$

$$(v_m''(t), z) + \langle -\Delta_p v_m(t), z \rangle + (|v_m(t)|^{r-1} v_m(t) |u_m(t)|^{r+1}, z) + (\nabla v_m'(t), \nabla z) = 0, \quad (3.12)$$

$$(u_m(0), v_m(0)) = (u_{0m}, v_{0m}) \longrightarrow (u_0, v_0) \text{ em } [W_0^{1,p}(\Omega)]^2, \quad (3.13)$$

$$(u_m'(0), v_m'(0)) = (u_{1m}, v_{1m}) \longrightarrow (u_1, v_1) \text{ em } [L^2(\Omega)]^2. \quad (3.14)$$

Colocando $w = z = w_j$, multiplicando (3.11) por $k_{jm}(t)$, e (3.12) por $h_{jm}(t)$, e somando com j de 1 a m , observamos que (3.11)–(3.12) é um sistema de EDOs na variável t e tem uma solução local $u_m(t)$, $v_m(t)$ num intervalo $[0, t_m)$ em virtude do teorema de Carathéodory. Na próxima etapa, obtemos as estimativas a priori para a solução $u_m(t)$, $v_m(t)$ de forma que ela possa ser estendida a todo o intervalo $[0, T)$, $T > 0$.

Estimativas a priori: Considerando $w = u_m'(t)$ e $z = v_m'(t)$ em (3.11) e (3.12), respectivamente, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} |u_m'(t)|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u_m(t)\|_p^p \right] + (|u_m(t)|^{r-1} u_m(t) |v_m(t)|^{r+1}, u_m'(t)) + |\nabla u_m'(t)|_2^2 = 0 \quad (3.15)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} |v_m'(t)|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla v_m(t)\|_p^p \right] + (|v_m(t)|^{r-1} v_m(t) |u_m(t)|^{r+1}, v_m'(t)) + |\nabla v_m'(t)|_2^2 = 0. \quad (3.16)$$

Adicionando (3.15) e (3.16) e observando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r+1} \frac{d}{dt} (|u_m(t)|^{r+1}, |v_m(t)|^{r+1}) &= (|u_m(t)|^{r-1} u_m(t) |v_m(t)|^{r+1}, u_m'(t)) \\ &\quad + (|v_m(t)|^{r-1} v_m(t) |u_m(t)|^{r+1}, v_m'(t)) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} |u_m'(t)|_2^2 + \frac{1}{2} |v_m'(t)|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u_m(t)\|_p^p + \frac{1}{p} \|\nabla v_m(t)\|_p^p \right. \\ \left. + \frac{1}{r+1} (|u_m(t)|^{r+1}, |v_m(t)|^{r+1}) \right] + |\nabla u_m'(t)|_2^2 + |\nabla v_m'(t)|_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Considerando a energia aproximada

$$E_m(t) = \frac{1}{2} (|u'_m(t)|_2^2 + |v'_m(t)|_2^2) + \frac{1}{p} (\|\nabla u_m(t)\|_p^p + \|\nabla v_m(t)\|_p^p) \\ + \frac{1}{r+1} (|u_m(t)|^{r+1} + |v_m(t)|^{r+1}),$$

temos

$$\frac{d}{dt} E_m(t) = -|\nabla u'_m(t)|_2^2 - |\nabla v'_m(t)|_2^2. \quad (3.17)$$

Integrando (3.17) de 0 a t , $t \leq t_m$, obtemos

$$E_m(t) + \int_0^t [|\nabla u'_m(s)|_2^2 + |\nabla v'_m(s)|_2^2] ds = E_m(0) \leq C, \quad (3.18)$$

em que $C > 0$ é uma constante independente de m e t . Então temos

$$(u_m), (v_m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (3.19)$$

$$(u'_m), (v'_m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.20)$$

$$(-\Delta_p u_m), (-\Delta_p v_m) \text{ são limitadas em } L^q(0, T; W^{-1,q}(\Omega)), \quad (3.21)$$

$$(u_m v_m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; L^{r+1}(\Omega)). \quad (3.22)$$

Como nossa base de Galerkin foi obtida no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, podemos usar os argumentos de projeção conforme descrito em LIONS (1969). Então, as equações aproximadas e as estimativas (3.19)–(3.22) nos dão

$$(u''_m) \text{ e } (v''_m) \text{ limitadas em } L^q(0, T; W^{-1,q}(\Omega)). \quad (3.23)$$

Passagem do Limite: De (3.19)–(3.22), existem subsequências de (u_m) e (v_m) , ainda denotadas por (u_m) e (v_m) , tais que

$$(u_m, v_m) \xrightarrow{*} (u, v) \text{ em } [L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))]^2, \quad (3.24)$$

$$(u'_m, v'_m) \xrightarrow{*} (u', v') \text{ em } [L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))]^2, \quad (3.25)$$

$$(-\Delta_p u_m, -\Delta_p v_m) \rightharpoonup (\chi_1, \chi_2) \text{ em } [L^q(0, T; W^{-1,q}(\Omega))]^2, \quad (3.26)$$

$$(u_m v_m) \xrightarrow{*} (uv) \text{ em } L^\infty(0, T; L^{r+1}(\Omega)). \quad (3.27)$$

Aplicando o lema de compacidade de Lions-Aubin (LIONS, 1969), obtemos de (3.24), (3.25) e (3.23), (3.25), respectivamente,

$$(u_m, v_m) \longrightarrow (u, v) \text{ em } [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2 = [L^2(Q)]^2, \quad (3.28)$$

$$(u'_m, v'_m) \longrightarrow (u', v') \text{ em } [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2 = [L^2(Q)]^2. \quad (3.29)$$

De onde

$$(u_m, v_m) \longrightarrow (u, v) \text{ q.s. em } Q^2$$

e

$$|u_m|^{r-1} u_m |v_m|^{r+1} \longrightarrow |u|^{r-1} u |v|^{r+1} \text{ q.s. em } Q,$$

$$|v_m|^{r-1} v_m |u_m|^{r+1} \longrightarrow |v|^{r-1} v |u|^{r+1} \text{ q.s. em } Q.$$

Desde que $p > r + 1$, temos $u_m v_m$ limitada em $L^\infty(0, T; L^{r+1}(\Omega)) \subset L^{r+1}(Q)$ e v_m limitada em $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^{r+1}(Q)$.

Considere $\frac{r}{r+1} + \frac{1}{r+1} = 1$. Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_Q |u_m|^{r-1} u_m |v_m|^{r+1} dx dt &\leq \int_Q |u_m v_m|^r |v_m| dx dt \\ &\leq \left[\int_Q (|u_m v_m|^r)^{\frac{r+1}{r}} dx dt \right]^{\frac{r}{r+1}} \left[\int_Q |v_m|^{r+1} dx dt \right]^{\frac{1}{r+1}} \\ &= \left[\int_Q (|u_m v_m|)^{r+1} dx dt \right]^{\frac{r}{r+1}} \left[\int_Q |v_m|^{r+1} dx dt \right]^{\frac{1}{r+1}} \\ &= |u_m v_m|_{L^{r+1}(Q)}^r |v_m|_{L^{r+1}(Q)} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Portanto, de **LIONS (1969)** Lema 1.3, inferimos que

$$|u_m|^{r-1} u_m |v_m|^{r+1} \rightharpoonup |u|^{r-1} u |v|^{r+1} \text{ em } L^1(Q) \quad (3.30)$$

e

$$|v_m|^{r-1} v_m |u_m|^{r+1} \rightharpoonup |v|^{r-1} v |u|^{r+1} \text{ em } L^1(Q). \quad (3.31)$$

Finalmente, uma vez que temos a convergência forte (3.28), podemos usar um argumento padrão de monotonicidade como proposto por **LIONS (1969)** para mostrar que $\chi_1 = -\Delta_p u$ e $\chi_2 = -\Delta_p v$.

Com as convergências (3.24)–(3.26) e (3.30), (3.31) temos

$$\frac{d}{dt}(u'(t), w) + \langle -\Delta_p u(t), w \rangle + (|u(t)|^{r-1} u(t) |v(t)|^{r+1}, w) + (\nabla u'(t), w) = 0 \quad (3.32)$$

e

$$\frac{d}{dt}(v'(t), z) + \langle -\Delta_p v(t), z \rangle + (|v(t)|^{r-1} v(t) |u(t)|^{r+1}, z) + (\nabla v'(t), z) = 0 \quad (3.33)$$

para todo $w, z \in W_0^{1,p}(\Omega)$ em $D'(0, T)$, no sentido de distribuições.

A verificação dos dados iniciais é um procedimento de rotina. A prova de existência está completa. $\square$

3.3 Comportamento Assintótico

Na prova do Teorema 3.3, usamos o seguinte resultado devido a M. Nakao.

Lema 3.2.

Suponha que $\phi(t)$ é uma função limitada não negativa em $\mathbb{R}^+$, satisfazendo

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \phi^{1+\beta}(s) \leq C_0[\phi(t) - \phi(t+1)],$$

para todo $t \geq 0$, em que $\beta > 0$ e C_0 são constantes positivas. Então, para todo $t \geq 0$

(a) Se $\beta = 0$ então $\phi(t) \leq C e^{-\gamma t}$,

(b) Se $\beta > 0$ então $\phi(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1}{\beta}}$,

em que C e γ são constantes positivas.

Demonstração. Ver, Teorema 1 de Nakao (1978) e Lema 2 de NAKAO e KUWAHARA (1987). $\square$

Nosso principal resultado é:

Teorema 3.3.

Sobre as hipóteses do Teorema 3.1, a solução do sistema (3.5) satisfaz

(a) $E(t) \leq C(E(0))e^{-\gamma t}$, se $p = 2$,

(b) $E(t) \leq C(E(0))(1+t)^{-\frac{p}{p-2}}$, se $p > 2$,

para todo $t \geq 0$, em que $C(E(0))$ e γ são constantes positivas.

Demonstração. Substituindo w e z em (3.31), (3.32) por $u'(t)$ e $v'(t)$, respectivamente, e adicionando as equações, temos

$$\frac{d}{dt} E(t) + |\nabla u'(t)|_2^2 + |\nabla v'(t)|_2^2 = 0$$

em que

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|_2^2 + \frac{1}{2}|v'(t)|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u(t)\|_p^p + \frac{1}{p}\|\nabla v(t)\|_p^p + \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} |u(t)|^{r+1} |v(t)|^{r+1} dx.$$

Integrando de t a $t+1$, $t \geq 0$, obtemos

$$E(t+1) = \int_t^{t+1} |\nabla u'(s)|_2^2 + |\nabla v'(s)|_2^2 ds = E(t) \quad (3.34)$$

então,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} |u'(s)|_2^2 + |v'(s)|_2^2 ds &\leq C \int_t^{t+1} |\nabla u'(s)|_2^2 + |\nabla v'(s)|_2^2 ds \\ &= C[E(t) - E(t+1)] =: F^2(t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

assim, existem $t_1 \in [t, t + \frac{1}{4}]$ e $t_2 \in [t + \frac{3}{4}, t + 1]$ tais que

$$|u'(t_i)| \leq 2F(t), \quad |v'(t_i)| \leq 2F(t), \quad i = 1; 2. \quad (3.36)$$

Substituindo w e z em (3.32), (3.33) por $u(t)$ e $v(t)$ respectivamente, e adicionando as equações, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(u'(t), u(t)) + (v'(t), v(t))] - |u'(t)|_2^2 - |v'(t)|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_p^p + \|\nabla v(t)\|_p^p \\ + 2 \int_{\Omega} |u(t)|^{r+1} |v(t)|^{r+1} dx + (\nabla u'(t), \nabla u(t)) + (\nabla v'(t), \nabla v(t)) = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Integrando (3.37) de t_1 a t_2 e usando (3.35) e (3.36) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\|\nabla u(t)\|_p^p + \|\nabla v(t)\|_p^p + 2 \int_{\Omega} |u(s)|^{r+1} |v(s)|^{r+1} dx \right] ds \\ \leq [|u'(t_1)|_2 \|\nabla u(t_1)\|_p + |u'(t_2)| \|\nabla u(t_2)\|_p] + F^2(t) \\ + \int_{t_1}^{t_2} [|\nabla u'(s)|_2 |\nabla u(s)|_2 + |\nabla v'(s)|_2 |\nabla v(s)|_2] ds. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} |\nabla u'(s)|_2 |\nabla u(s)|_2 + |\nabla v'(s)|_2 |\nabla v(s)|_2 ds &\leq C \int_{t_1}^{t_2} |\nabla u'(s)|_2 \|\nabla u(s)\|_p + |\nabla v'(s)|_2 \|\nabla v(s)\|_p ds \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(s)\|_p^p + \|\nabla v(s)\|_p^p ds \\ &\quad + C_1 \left(\int_{t_1}^{t_2} |\nabla u'(s)|_2^2 + |\nabla v'(s)|_2^2 ds \right)^{\frac{q}{2}} \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(s)\|_p^p + \|\nabla v(s)\|_p^p ds + C_1 F^q(t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

De (3.38) e (3.39), temos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{p} \right) [\|\nabla u(s)\|_p^p + \|\nabla v(s)\|_p^p] + 2 \int_{\Omega} |u(s)|^{r+1} |v(s)|^{r+1} dx \right\} ds \\ \leq C_2 \left[F^2(t) + F^q(t) + F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \sqrt[p]{E(s)} \right] =: G^2(t). \end{aligned} \quad (3.40)$$

De (3.35) e (3.40), segue que

$$\int_{t_1}^{t_2} E(s) ds \leq F^2(t) + G^2(t).$$

Então, existe $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que

$$E(t^*) \leq 2F^2(t) + 2G^2(t).$$

De (3.34) temos

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E(s) \leq E(t^*) + \int_{t_1}^{t_2} [|\nabla u'(s)|_2^2 + |\nabla v'(s)|_2^2] ds$$

então,

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq s \leq t+1} E(s) &\leq C_3 [F^2(t) + G^2(t)] \leq C_4 \left[F^2(t) + F^q(t) + F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \sqrt[p]{E(s)} \right] \\ &\leq C_5 [F^2(t) + F^q(t)] + \frac{1}{p} \sup_{t \leq s \leq t+1} E(s). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E(s) \leq C_6 F^q(s) [F^{2-q}(t) + 1]. \quad (3.41)$$

Por (3.35), temos

$$\begin{aligned} F^2(t) &= \int_t^{t+1} [|\nabla u'(s)|_2^2 + |\nabla v'(s)|_2^2] ds \leq \int_0^{t+1} [|\nabla u'(s)|_2^2 + |\nabla v'(s)|_2^2] ds \\ &= E(0) - E(t+1) < E(0). \end{aligned}$$

De onde,

$$F^{2-q}(t) = (F^2(t))^{\frac{2-q}{2}} < (E(0))^{\frac{2-q}{2}} = C(E(0)). \quad (3.42)$$

De (3.41) e (3.42), temos,

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E(s) \leq C(E(0)) F^q = C(E(0)) (F^2(t))^{\frac{q}{2}}$$

e

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E^{\frac{2}{q}}(s) \leq C(E(0)) F^2(t).$$

Assim, por (3.35) temos

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E^{\frac{2}{q}}(s) \leq C(E(0)) [E(t) - E(t+1)].$$

Portanto, aplicando o lema para $\phi(t) = E(t)$ temos:

(a) Se $p = 2$, então $q = 2$ e

$$E(t) \leq C(E(0)) e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0,$$

em que γ é uma constante positiva.

(b) Se $p > 2$, então $\frac{2}{q} = 1 + \frac{p-2}{p}$ e então

$$E(t) \leq C(E(0)) (1+t)^{-\frac{p}{p-2}}, \quad \forall t \geq 0.$$

A prova do teorema está completa □

Comentários Finais

Os resultados sobre a existência de soluções para o problema com o operador p -Laplaciano têm um histórico não trivial. Apenas o caso subcrítico ($r < p$) foi considerado neste trabalho. No cenário supercrítico ($r > p$), temos uma solução global apenas sob uma pequena suposição nos dados iniciais. Ressalta-se aqui que a presença do mecanismo de amortecimento também foi essencial para a estabilização do sistema. Por exemplo, a presença da fonte $|u|^{r-1}u$ em (3.4) sozinha deve conduzir a solução para explodir em tempo finito, como visto, por exemplo, em Glassey (1973). No entanto,

quando o amortecimento e a fonte estão presentes, a análise de sua interação e sua influência no comportamento global das soluções tornou-se mais difícil e serviu de motivação para este estudo, ver [Bociu e Lasiecka \(2008\)](#), [Barbu, Lasiecka e Rammaha \(2005\)](#), [Georgiev e Todorova \(1994\)](#), [Rammaha e Strei \(2002\)](#) e as referências nelas contidas.

Solução Global para um Sistema Termo-elástico com p -Laplaciano

Applied Mathematics Letters 86 (2018) 119–125



Contents lists available at ScienceDirect

Applied Mathematics Letters

www.elsevier.com/locate/aml



Global solution for a thermoelastic system with p -Laplacian[☆]

C.A. Raposo^{a,*}, J.O. Ribeiro^b, A.P. Cattai^c

Resumo

Provamos a solução global para o sistema não linear

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_p u + \theta &= |u|^{r-1} u \\ \theta_t - \Delta \theta &= u_t \end{cases}$$

em que Δ_p é o operador não linear p -Laplaciano, $2 \leq p < \infty$. Aplicamos a teoria o poço potencial. A solução global é construída por meio das aproximações de Faedo-Galerkin, levando em consideração que os dados iniciais estão em um conjunto apropriado de estabilidade criado a partir da Variedade de Nehari.

Palavras-chave: p -Laplaciano • Solução Global • O poço potencial • Sistema Termoelástico.

4.1 Introdução

Ao longo do texto, omitimos a variável de espaço x de $u(x, t)$, simplesmente denotamos $u(x, t)$ por $u(t)$ quando não houver confusão, C denota várias constantes positivas dependendo das constantes conhecidas e podem ser diferentes em cada aparência. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com bordo $\partial\Omega$ suficientemente suave, $2 \leq p < \infty$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. A dualidade entre os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ e seu dual $W^{-1,q}(\Omega)$ será denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Conforme a desigualdade de Poincaré, a norma padrão $\| \cdot \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ é equivalente a norma $\| \nabla \cdot \|_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Daqui em diante, colocamos $\| \cdot \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \| \nabla \cdot \|_p$. Denotamos $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)} = | \cdot |_2$ e o produto interno usual por $(\cdot, \cdot)$. Denotamos o operador p -Laplaciano por $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, o qual pode ser estendido a um operador monótono, limitado, hemicontínuo e coercivo entre os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ e seu dual, dado por

$$-\Delta_p: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,q}(\Omega), \quad \langle -\Delta_p u, v \rangle_p = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

A existência de uma solução global para equação de onda tipo p -Laplaciano

$$u_{tt} - \Delta_p u = 0 \tag{4.1}$$

sem um termo dissipativo adicional é um problema em aberto. Para $n = 1$, [Dreher \(2007\)](#) provou a existência local de solução e mostrou por um exemplo que a solução global não existe. Acrescentando um amortecimento forte $-\Delta u_t$ em (4.1) comportamento bem posicionado e assintótico foi estudado por [Greenberg, MacCamy e Vîzel \(1968\)](#). No entanto, se o amortecimento forte for substituído por amortecimento mais fraco u_t , então existência global e unicidade são conhecidas somente para $n = 1; 2$, conforme [Chueshov e Lasiecka \(2006\)](#), [Zhijian \(2003\)](#). Em [Gao e Ma \(1999\)](#) foi estudada a existência global de solução e o comportamento assintótico para o amortecimento $(-\Delta)^\alpha u_t$ com $0 < \alpha \leq 1$. Para alguns outros trabalhos sobre o assunto citamos [Pei, Rammaha e Toundykov \(2015\)](#) e as referências lá contidas.

Consideramos o efeito térmico atuando sobre (4.1). O caso de $p = 2$ foi comprovado no trabalho pioneiro de [Dafermos \(1968\)](#) que o sistema termoelástico linear define um semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert apropriado. Aqui consideramos $2 \leq p < \infty$, de fato, para $(x, t) \in \Omega \times [0, t)$, temos interesse em provar a existência de solução global para o problema

$$u_{tt} - \Delta_p u + \theta = |u|^{r-1} u \tag{4.2}$$

$$\theta_t - \Delta \theta = u_t \tag{4.3}$$

com as condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \tag{4.4}$$

e as de contorno

$$u(x, t) = \theta(x, t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times [0, \infty). \tag{4.5}$$

Está assim organizado. A seção 4.2 trata do potencial do poço, apresentamos algumas notações e o conjunto de estabilidade para o problema. Na seção 4.3 provamos a existência de solução pelo método de Faedo-Galerkin.

4.2 O Poço Potencial

A energia de um sistema de equações diferenciais parciais é, num certo sentido, dividida em energia cinética e energia potencial. Seguindo a ideia de Ye (2007), podemos construir um conjunto de estabilidade. Provaremos que existe um vale ou um “poço” de profundidade d criado na energia potencial. Se esta altura d for estritamente positiva, descobrimos que, para soluções com dados iniciais na “parte boa” do poço, a energia potencial da solução nunca escapa do poço. Em geral, é possível que a energia do termo da fonte cause a explosão num tempo finito. Porém na parte boa do poço ela permanece delimitada. Como resultado, a energia total da solução permanece finita em qualquer intervalo de tempo $[0, T)$, que fornece a existência global da solução. Começamos apresentando o funcional $J: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} |u|^{r+1} dx. \quad (4.6)$$

Para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ definimos o funcional

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^p}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda^{r+1}}{r+1} \int_{\Omega} |u|^{r+1} dx, \quad 0 < \lambda. \quad (4.7)$$

Associado ao funcional J , temos a conhecida *Variedade de Nehari* dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) / \{0\}; \left[\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) \right]_{\lambda=1} = 0 \right\} \\ &= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) / \{0\}; \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \int_{\Omega} |u|^{r+1} dx \right\}. \end{aligned}$$

Definimos, como no teorema do passo da montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz (1973),

$$d := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) / \{0\}} \sup_{0 \leq \lambda} J(\lambda u).$$

Para $1 < r \leq 5$ a profundidade do poço d é uma constante estritamente positiva, conforme Willem (1996), Teorema 4.2, e

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

Agora, apresentamos o potencial do poço $\mathcal{W} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); J(u) < d\} \cup \{0\}$ e particioná-lo em dois conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \left\{ u \in \mathcal{W}; \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx > \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} |u|^{r+1} dx \right\} \cup \{0\} \\ \mathcal{W}_2 &= \left\{ u \in \mathcal{W}; \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx < \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} |u|^{r+1} dx \right\}. \end{aligned}$$

Iremos nos referir a $\mathcal{W}_1$ como a parte “boa” do poço e $\mathcal{W}_2$ como a parte “ruim” do poço. Então definimos por $\mathcal{W}_1$ o conjunto de estabilidade para o problema (4.2)–(4.5). A energia total do problema (4.2)–(4.5) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta(t)|^2 dx + J(u(t)).$$

4.3 Solução Global

Teorema 4.1.

Seja $1 < r \leq 5$. Dados $u_0 \in \mathcal{W}_1$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$ existem funções $u, \theta: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{q.s. em } \Omega, \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt}(u_t, \phi) + \langle -\Delta_p u, \phi \rangle_p = (|u|^{r-1} u, \phi), \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ em } D'(0, T), \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta, \psi) + (-\Delta \theta, \psi) = (u_t, \psi), \quad \forall \psi \in L^2(\Omega) \text{ em } D'(0, T). \quad (4.11)$$

Demonstração. Denote por

$$\mathcal{K}_j = \{K \subset \{u \in L^p(\Omega); \|u\|_p = 1\}; K \text{ compacto, simétrico e } \gamma(K) \geq j\},$$

em que $\gamma(G) = \inf\{m; \exists \phi: G \rightarrow \mathbb{R}/\{0\}, \phi \text{ função ímpar contínua}\}$ denota o gênero de Krasnoselski.

Em Coffman (1973) está provado que

$$\lambda_j = \inf_{G \in \mathcal{K}_j} \sup_{u \in G} \|\nabla u\|_p^p$$

é uma sequência de autovalores do operador p -Laplaciano $-\Delta_p: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,q}(\Omega)$, que é monótono, coercivo e hemicontínuo em $W_0^{1,p}(\Omega)$. O teorema de Minty-Browder, garante a existência de uma base $(\phi_j)_{j=1}^\infty$ para $W_0^{1,p}(\Omega)$ dada pela solução do problema estacionário

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_j &= \lambda_j \phi_j, \\ \phi_j &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos, conforme Fabian et al. (2011), capítulo 4, que existe uma base $(\psi_j)_{j=1}^\infty$ para o operador Laplaciano dada por

$$\begin{cases} -\Delta \psi_j &= \mu_j \psi_j, \\ \psi_j &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Após processo de ortogonalização elas são bases de Galerkin para $-\Delta_p$ e $-\Delta$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere $\Phi_m = \text{Span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$ e $\Psi_m = \text{Span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$.

Buscamos funções

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m f_{jm}(t) \phi_j \quad \text{e} \quad \theta_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \psi_j$$

tais que, para todo $\phi \in \Phi_m$ e $\psi \in \Psi_m$, $u_m(t)$ e $\theta_m(t)$ satisfazem as equações aproximadas

$$(u_m''(t), \phi) + \langle -\Delta_p u_m(t), \phi \rangle_p + (\theta_m(t), \phi) = (|u_m(t)|^{r-1} u_m(t), \phi), \quad (4.12)$$

$$(\theta_m'(t), \psi) + (-\Delta \theta_m(t), \psi) = (u_m'(t), \psi), \quad (4.13)$$

com as condições iniciais $u_m(0) = u_{0m}$, $u_m'(0) = u_{1m}$ e $\theta_m(0) = \theta_{0m}$, em que u_{0m} , u_{1m} e θ_{0m} são escolhidas em Φ_m e Ψ_m tais que

$$u_{0m} \rightarrow u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \theta_{0m} \rightarrow \theta_0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (4.14)$$

Colocando $\phi = \phi_i$, $\psi = \psi_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, e usando

$$\begin{aligned} u_m''(t) &= \sum_{j=1}^m f_{jm}''(t) \phi_j(x), & \Delta_p u_m(t) &= \sum_{j=1}^m f_{jm}(t) \Delta_p \phi_j(x), \\ \theta_m'(t) &= \sum_{j=1}^m g_{jm}'(t) \psi_j(x), & \Delta \theta_m(t) &= \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \Delta \psi_j(x), \end{aligned}$$

observamos que (4.12)–(4.13) leva a um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável t que tem uma solução local $u_m(t), \theta_m(t)$ num intervalo $[0, t_m)$ em virtude do teorema de Carathéodory. No próximo passo obtemos estimativas a priori para a solução $u_m(t), \theta_m(t)$ de forma que possam ser estendidas a todo o intervalo $[0, T]$, $T > 0$.

Estimativas a Priori: Substituindo $\phi = u_m'(t)$, $\psi = \theta_m(t)$ na equação aproximada (4.12), (4.13) obtemos

$$(u_m''(t), u_m'(t)) - \langle \Delta_p u_m(t), u_m'(t) \rangle_p + (\theta_m(t), u_m'(t)) = (|u_m(t)|^{r-1} u_m(t), u_m'(t)), \quad (4.15)$$

$$(\theta_m'(t), \theta_m(t)) + (-\Delta \theta_m(t), \theta_m(t)) = (u_m'(t), \theta_m(t)). \quad (4.16)$$

Seja $z \in D(0, t_m)$. Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre D' e D . Temos,

$$\langle (u_m''(t), u_m'(t)), z \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_m'(t)|^2 dx, z \right\rangle, \quad (4.17)$$

$$\langle \langle -\Delta_p u_m(t), u_m'(t) \rangle_p, z \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^p dx, z \right\rangle, \quad (4.18)$$

$$\langle (|u_m(t)|^{r-1} u_m(t), u_m'(t))_p, z \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} |u_m(t)|^{r+1} dx, z \right\rangle, \quad (4.19)$$

$$\langle (\theta_m'(t), \theta_m(t)), z \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(t)|^2 dx, z \right\rangle, \quad (4.20)$$

$$\langle (-\Delta \theta_m(t), \theta_m(t)), z \rangle = \left\langle \int_{\Omega} |\nabla \theta_m(t)|^2 dx, z \right\rangle. \quad (4.21)$$

Substituindo (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) em (4.15) e (4.16) obtemos em $D'(0, t_m)$

$$\frac{d}{dt} E_m(t) = - \int_{\Omega} |\nabla \theta_m(t)|^2 dx, \quad (4.22)$$

de onde segue que a energia aproximada

$$\begin{aligned} E_m(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(t)|^2 dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^p dx - \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} |u_m(t)|^{r+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(t)|^2 dx + J(u_m(t)) \end{aligned}$$

satisfaz

$$E_m(t) \leq E_m(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m(0)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(0)|^2 dx + J(u_m(0)).$$

Temos que $J(u_m(0)) < d$ em $\mathcal{W}_1$. Por convergência dos dados iniciais (4.14), existe uma constante $C > 0$ independente de t e m tal que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m(0)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(0)|^2 dx \leq C.$$

Com a estimativa $E_m(t) \leq E_m(0) \leq C$ podemos estender as soluções aproximadas $u_m(t)$, $\theta_m(t)$ para o intervalo $[0, T]$, $T > 0$. Note que

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta_m(t)|^2 dx dt \leq \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta_m(t)|^2 dx dt + E_m(t) \leq E_m(0) \leq C. \quad (4.23)$$

Então, temos

$$u_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^{r+1}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (4.24)$$

$$u'_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.25)$$

$$-\Delta_p u_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad (4.26)$$

$$|u_m(t)|^{r-1} u_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)), \quad (4.27)$$

$$\theta_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (4.28)$$

$$-\Delta \theta_m(t) \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.29)$$

Agora vamos obter uma estimativa para $u''_m(t)$. Uma vez que nossa base de Galerkin foi tomada no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, podemos usar os argumentos padrões de projeção, conforme descrito em LIONS (1969). Então, a partir da equação aproximada e das estimativas (4.24)–(4.26), obtemos que

$$u''_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; W^{-1,q}(\Omega)). \quad (4.30)$$

Passagem do Limite: De (4.24)–(4.29) indo para a subsequência adequada se necessário (que continuamos a denotar da mesma maneira), existem $u(t)$, $\theta(t)$ de tal forma que

$$u_m(t) \xrightarrow{*} u(t) \text{ em } L^\infty(0, T; L^{r+1}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (4.31)$$

$$u'_m(t) \xrightarrow{*} u'(t) \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.32)$$

$$-\Delta_p u_m(t) \xrightarrow{*} \mathcal{X}_1(t) \text{ em } L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad (4.33)$$

$$|u_m(t)|^{r-1} u_m(t) \xrightarrow{*} \mathcal{X}_2(t) \text{ em } L^\infty(0, T; L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)), \quad (4.34)$$

$$\theta_m(t) \xrightarrow{*} \theta(t) \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.35)$$

$$-\Delta \theta_m(t) \xrightarrow{*} -\Delta \theta(t) \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.36)$$

Aplicando o lema de compacidade de Lions-Aubin, [LIONS \(1969\)](#), temos de (4.31), (4.32) e (4.30),

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.37)$$

$$u'_m(t) \rightarrow u'(t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.38)$$

Precisamos provar que $\mathcal{X}_1(t) = -\Delta_p u(t)$. Considere as desigualdades elementares

$$\left| |x|^{\frac{p-2}{2}} x - |y|^{\frac{p-2}{2}} y \right| \leq C \left(|x|^{\frac{p-2}{2}} + |y|^{\frac{p-2}{2}} \right) |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad p \geq 2, \quad (4.39)$$

$$||x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y| \leq C \left(|x|^{\frac{p-2}{2}} + |y|^{\frac{p-2}{2}} \right) \left| |x|^{\frac{p-2}{2}} x - |y|^{\frac{p-2}{2}} y \right|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad p \geq 2. \quad (4.40)$$

A desigualdade (4.39) é uma consequência do teorema do valor médio e (4.40) pode ser encontrada em [Domokos e Manfredi \(2009\)](#). Aplicando (4.39), (4.40) e a desigualdade generalizada de Hölder com

$$\frac{p-2}{4p} + \frac{p-2}{4p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = 1$$

deduzimos

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \langle -\Delta_p u_m(t), v \rangle_p - \langle -\Delta_p u(t), v \rangle_p \, z \, dt \right| \\ &= \left| \int_0^T \int_{\Omega} (|\nabla u_m(t)|^{p-2} \nabla u(t) - |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t)) \nabla v \, dx \, z \, dt \right| \\ &\leq C \|z\|_{\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \left(|\nabla u_m(t)|^{\frac{p-2}{2}} + |\nabla u(t)|^{\frac{p-2}{2}} \right) \left| |\nabla u_m(t)|^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_m(t) - |\nabla u(t)|^{\frac{p-2}{2}} \nabla u(t) \right| |\nabla v| \, dx \, dt \\ &\leq C \int_0^T \int_{\Omega} \left(|\nabla u_m(t)|^{\frac{p-2}{2}} + |\nabla u(t)|^{\frac{p-2}{2}} \right)^2 |\nabla u_m(t) - \nabla u(t)| |\nabla v| \, dx \, dt \\ &\leq C \int_0^T \left(\|\nabla u_m(t)\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p-2}{8}} + \|\nabla u(t)\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p-2}{8}} \right)^2 \|\nabla u_m(t) - \nabla u(t)\|_2 \|\nabla v\|_p \, dt \\ &\leq C \int_0^T \|\nabla u_m(t) - \nabla u(t)\|_2 \, dt. \end{aligned}$$

Usando (4.37) temos que $u_m(t) \rightarrow u(t)$ q.s. em $\Omega \times (0, T)$, que leva a $\mathcal{X}_1(t) = -\Delta_p u(t)$.

Para provar $\mathcal{X}_2(t) = |u(t)|^{r-1} u(t)$ observe que,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left| |u_m(t)|^{r-1} u_m(t) \right|^{\frac{r+1}{r}} \, dx = \int_0^T \int_{\Omega} |u_m(t)|^{r+1} \, dx \leq C$$

então $|u_m(t)|^{r-1} u_m(t) \rightarrow |u(t)|^{r-1} u(t)$ q.s. em $\Omega \times [0, t]$. Portanto, de [LIONS \(1969\)](#), Lema 1.3, inferimos que

$$|u_m(t)|^{r-1} u_m(t) \rightarrow |u(t)|^{r-1} u(t) \text{ em } L^{\frac{r+1}{r}} \left(0, T; L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega) \right) \quad (4.41)$$

então, temos de (4.34) e (4.41) que $\mathcal{X}_2 = |u(t)|^{r-1} u(t)$.

Agora, com as convergências (4.32)–(4.36), podemos passar ao limite no sistema aproximado e obter (4.10), (4.11). A verificação dos dados iniciais é um procedimento de rotina. A prova da existência está completa. $\square$

Comentários Finais

O termo de força pode ser mais geral do que $|u|^{r-1}u$, tipo $f \in C^1(\mathbb{R})$ com $|f(u)| \leq c|u|^r$ para todo $|u| \geq 1$, em que $1 \leq r < 6$ com as imersões de Sobolev adequadas. Por exemplo, para $n = 3$ temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ e o operador Nemytski $f(u)$ é localmente Lipschitz de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ para $1 \leq r \leq 3$. Chamamos a fonte de subcrítica quando $1 \leq r < 3$, crítica se $r = 3$ e supercrítica para $3 < r \leq 5$. Quando $5 < r < 6$ a fonte é super-supercrítica, veja [Bociu e Lasiecka \(2008\)](#) e é a situação onde a energia potencial não pode ser definida no espaço de energia finito, então o problema em si não está mais na estrutura da teoria do potencial do poço.

Solução global e “blow-up” para um sistema termoelástico tipo p -Laplaciano sob amortecimento fraco e fonte logarítmica

Resumo

Abordaremos a solução global, estabilidade polinomial e o comportamento blow-up em tempo finito para o sistema não linear

$$\begin{cases} u'' - \Delta_p u + \theta + \alpha u' &= |u|^{p-2} u \ln |u| \\ \theta' - \Delta \theta &= u' \end{cases}$$

em que Δ_p é o operador não linear p -Laplaciano, com $2 \leq p < \infty$. Levando em consideração que os dados iniciais estão num conjunto de estabilidade adequado criado a partir da variedade de Nehari, a solução global é construída por meio das aproximações de Faedo-Galerkin e o decaimento polinomial é provado para um nível subcrítico de energia inicial. O comportamento blow-up é mostrado num conjunto de instabilidade com valores de energia negativos.

Palavras-chaves: Solução Global • Blow-up • Sistema Termoelástico tipo p -Laplaciano • Fonte Logarítmica

5.1 Introdução

Um sistema termoelástico é o resultado do acoplamento de uma equação hiperbólica com uma equação parabólica. Como é bem conhecido, eles descrevem o comportamento elástico e térmico de meios elásticos e condutores de calor, especialmente as interações entre tensões elásticas e diferenças de temperatura.

Problemas hiperbólicos não lineares sempre foram muito estudados por matemáticos e físicos. Do ponto de vista matemático, por exemplo, em (LIAN; XU, 2020) foi investigado o problema de valor de contorno e inicial de uma equação de onda não linear com termos de amortecimento forte e fraco e termo logarítmico, e em (HA; PARK, 2020) a equação da onda viscoelástica com um forte amortecimento e fonte logarítmica não linear foi considerada. Na física, a fonte logarítmica não linear $|u|^{p-2}u \ln |u|$ surge na cosmologia, teorias supersimétricas, mecânica quântica, física nuclear e mecânica dos fluidos, conforme (BARROW; PARSONS, 1995; ENQVIST; MCDONALD, 1998; GÓRKA, 2009; ZLOSHCHASTIEV, 2018).

O trabalho pioneiro em termoelasticidade sem p -Laplaciano foi apresentado por C.M. Dafermos (DAFERMOS, 1968) em 1968. Desde então, em vários contextos, um grande interesse despertou e hoje em dia existem muitos resultados sobre soluções global e local, estabilidade e comportamento de explosão de soluções na teoria de termoelasticidade. Podemos citar (CHEN, 2019; FAREH; MESSAOUDI, 2017; FENG, 2020; KAFINI; MESSAOUDI; MUSTAFA, 2013; LASIECKA; POKOJOVY; WAN, 2017; NONATO; RAPOSO; FENG, 2021; QIN; RIVERA, 2004; RAPOSO; VILLAGRAN; FERREIRA, 2021; RIVERA, 1992; RACKE; UEDA, 2017; LEBEAU; ZUAZUA, 1999) com suas referências.

Em relação à solução global para a equação de onda tipo p -Laplaciano sem um termo de dissipação adicional

$$u'' - \Delta_p u = 0, \quad (5.1)$$

para $n = 1$, M. Derher (DREHER, 2007) provou a existência de solução local no tempo e mostrou por um exemplo que a solução global no tempo não pode ser esperada. Adicionando um amortecimento forte $-\Delta u'$ em (5.1) o comportamento bem posicionado e assintótico foi estudado por Greenberg, MacCamy e Vize (1968). Na verdade, o amortecimento forte desempenha um papel importante na existência e estabilidade da equação de onda tipo p -Laplaciano, ver, por exemplo, $n \geq 2$ (BENAISSA; MOKEDDEM, 2007; ANG; DINH, 1988; D'ANCONA; SPAGNOLO, 1991; MA; SORIANO, 1999; PEI; RAMMAHA; TOUNDYKOV, 2015; RAMMAHA; TOUNDYKOV; WILSTEIN, 2012; YE, 2007). No entanto, se o amortecimento forte for substituído por um amortecimento mais fraco u' , então a existência global e a unicidade são conhecidas apenas para $n = 1, 2$, conforme Chueshov e Lasiecka (2006). Para o amortecimento intermediário dado por $(-\Delta)^\alpha u'$, com $0 < \alpha \leq 1$, em Gao e Ma (1999) foi provada a solução global dependendo do crescimento de um termo forçado. O pano de fundo desses problemas está na física, especialmente na mecânica dos sólidos.

Problemas termoelásticos envolvendo o p -Laplaciano estão se tornando um novo objeto

de pesquisa. Em (BOUDJERIOU, 2020) foi estudado o problema para uma equação parabólica envolvendo p -Laplaciano fracionário com não linearidade logarítmica. Em (RAPOSO; RIBEIRO; CATTAL, 2018) foi considerado o efeito térmico atuando sobre (5.1). Para $2 \leq p < \infty$, foi comprovada a existência de uma solução global para o problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' - \Delta_p u + \theta &= |u|^{r-1} u, \\ \theta' - \Delta \theta &= u'. \end{cases} \quad (5.2)$$

Para o sistema (5.2), em Ding e Zhou (2021), empregando a teoria do potencial do poço, os autores discutem as propriedades de existência global e explosão de tempo finito para as soluções. Além disso, eles fornecem os limites inferior e superior de tempo de expansão para as soluções de expansão.

Em relação ao modelo (5.2) analisamos com o amortecimento fraco $\alpha u'$, $\alpha > 0$ e a fonte logarítmica $|u|^{p-2} u \ln |u|$. Para nosso objetivo, consideramos o seguinte sistema

$$u'' - \Delta_p u + \theta + \alpha u' = |u|^{p-2} u \ln |u|, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (5.3)$$

$$\theta' - \Delta \theta = u', \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (5.4)$$

com as condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.5)$$

e as de contorno

$$u(x, t) = \theta(x, t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times [0, \infty), \quad (5.6)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio aberto limitado, com fronteira suave $\partial\Omega$ e $2 \leq p < \infty$ é um número real.

Está assim, organizado. Na Seção 5.2, apresentamos a notação e alguns lemas técnicos. A seção 5.3 trata do poço potencial, introduzimos algumas notações e o conjunto de estabilidade para o problema. Na seção 5.4, introduzimos uma base de Galerkin adequada necessária para lidar com o operador p -Laplaciano. Na seção 5.5 provamos a existência de solução global pelo método de Faedo-Galerkin. Na seção 5.6 provamos o decaimento polinomial. Finalmente, na seção 5.7 provamos o blow-up em tempo finito para dados iniciais no conjunto de instabilidade.

5.2 Preliminares

A dualidade entre o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ e seu dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ será denotado usando a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. De acordo com a desigualdade de Poincaré, a norma padrão $\| \cdot \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ é equivalente à norma $\| \nabla \cdot \|_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Doravante, colocamos $\| \cdot \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \| \nabla \cdot \|_p$. Denotamos $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)} = \| \cdot \|_2$ e o produto interno usual por $(\cdot, \cdot)$.

Seja B um espaço de Banach e $u: [0, T] \rightarrow B$ uma função mensurável. Denotamos por

$$L^p(0, T; B) = \left\{ u; \left(\int_0^T \|u(t)\|_B^p dt \right)^{1/p} < \infty, \text{ se } 1 \leq p < \infty \right\},$$

$$L^\infty(0, T; B) = \left\{ u; \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_B < \infty, \text{ se } p = \infty \right\}.$$

O operador p -Laplaciano é dado por $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, em que ele pode ser estendido a um operador monótono, limitado, hemicontínuo e coercivo entre os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ e seu dual

$$-\Delta_p: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega), \quad \langle -\Delta_p u, v \rangle_p = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Assumimos que o parâmetro p satisfaz as seguintes suposições.

(H): $p \geq 2$ se $n = 1; 2$ e $2 \leq p \leq \frac{2n-2}{n-2}$ se $n \geq 3$.

De **(H)**, temos

$$W_0^{1,2(p-1)}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Agora, apresentamos alguns resultados que serão utilizados no decorrer do texto.

Lema 5.1 (Kim (1989), Lema 1.4).

Seja u_m uma sequência de funções tal que, $m \rightarrow \infty$

$$u^m \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; H^\beta(\Omega)),$$

$$u_t^m \rightharpoonup u_t \text{ em } L^2(0, T; H^\alpha(\Omega)),$$

em que $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Então, temos

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } C([0, T]; H^\eta(\Omega)), \text{ para todo } \eta < \beta.$$

Lema 5.2 (LIONS (1969), Lemma 1.3).

Seja $Q = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$ um aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $g_m, g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ funções de $L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L(Q)$, $1 < p < \infty$ tais que $\|g_m\|_{L^p(Q)} \leq C$, $g_m \rightarrow g$ q.s. em Q . Então $g_m \rightharpoonup g$ em $L^p(0, T; L^p(\Omega))$ quando $m \rightarrow \infty$.

Lema 5.3 (LIONS (1969), Theorem 5.1).

Seja $T > 0$, $1 < p_0, p_1 < \infty$. Considere $B_0 \subset B \subset B_1$ espaços de Banach, B_0, B_1 reflexivos, B_0 com imersão compacta em B . Seja $W = \{u \mid u \in L^{p_0}(0, T; B_0), u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$ equipado com a norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$. Então, W tem imersão compacta em $L^{p_0}(0, T; B)$.

Lema 5.4 (Martinez (1999)).

Seja $E: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ uma função não crescente e $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função C^1 crescente tal que $\phi(0) = 0$ e $\phi(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

Suponha que existam $\sigma > -1$ e $\omega > 0$ tais que

$$\int_S^\infty E^{1+\sigma}(t) \phi'(t) dt \leq \frac{1}{\omega} E^\sigma(0) E(S), \quad 0 \leq S < \infty.$$

Então

$$\begin{aligned} E(t) &= 0, \quad \forall t \geq \frac{E(0)^\sigma}{\omega|\sigma|}, \quad \text{se } -1 < \sigma < 0, \\ E(t) &\leq E(0) \left(\frac{1+\sigma}{1+\omega\phi(t)} \right)^{1/\sigma}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{se } \sigma > 0, \\ E(t) &\leq E(0) e^{1-\omega\phi(t)}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{se } \sigma = 0. \end{aligned}$$

Lema 5.5 (Levine (1974), Qin e Rivera (2004)).

Suponha que $\phi(t) \in C^2[0, \infty)$ é uma função positiva satisfazendo

$$\phi(t)\phi''(t) - (1+\gamma)(\phi'(t))^2 \geq -2C_1\phi(t)\phi'(t) - C_2(\phi(t))^2,$$

em que $C_1, C_2 \geq 0$ e $\gamma > 0$ são constantes. Se

$$C_1 + C_2 \geq 0, \phi(0) > 0, \phi'(0) + \gamma_2 \frac{1}{\gamma} \phi(0) > 0,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow T_-} \phi(t) = +\infty,$$

em que

$$T \leq \frac{1}{2\sqrt{C_1^2 + \gamma C_2}} \ln \left[\frac{\gamma_1 \phi(0) + \gamma \phi'(0)}{\gamma_2 \phi(0) + \gamma \phi'(0)} \right],$$

e

$$\gamma_1 = -C_1 + \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2}, \quad \gamma_2 = -C_1 - \sqrt{C_1^2 + \gamma C_2}.$$

5.3 O Poço Potential

Usamos a teoria do poço potencial, uma ferramenta poderosa no estudo da existência global de soluções para equações diferenciais parciais, conforme Payne e Sattinger (1975). É bem conhecido que a energia de um sistema EDP, em certo sentido, se divide em energia cinética e energia potencial. A energia do problema (5.3)–(5.6) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |u'(t)|^2 dx + \frac{1}{p^2} \int_\Omega |u(t)|^p dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\theta(t)|^2 dx + \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u(t)|^p dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u(t)|^p \ln |u(t)| dx.$$

Multiplicando (5.3) por u' , (5.4) por θ , integrando por partes e usando (5.6), obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha \|u'(t)\|_2^2 - \|\nabla \theta(t)\|_2^2. \quad (5.7)$$

Introduzimos o funcional

$$J(u(t)) = \frac{1}{p^2} \int_{\Omega} |u(t)|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u(t)|^p \ln |u(t)| dx.$$

Associado ao $J(\lambda u)$ temos a conhecida *Variedade de Nehari* dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \left\{ u(t) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,2(p-1)}(\Omega) / \{0\} : \left[\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u(t)) \right]_{\lambda=1} = 0 \right\} \\ &= \left\{ u(t) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,2(p-1)}(\Omega) / \{0\} : \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx = \int_{\Omega} |u(t)|^p \ln |u(t)| dx \right\}. \end{aligned}$$

Agora, introduzimos o poço potential (conjunto estável)

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ u(t) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,2(p-1)}(\Omega) / \{0\} : \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx > \int_{\Omega} |u(t)|^p \ln |u(t)| dx \right\} \cup \{0\}.$$

e o conjunto não estável

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ u(t) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,2(p-1)}(\Omega) / \{0\} : \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx < \int_{\Omega} |u(t)|^p \ln |u(t)| dx \right\}.$$

Definimos, como no teorema do Passo da Montanha, devido a [Ambrosetti e Rabinowitz \(1973\)](#)

$$d := \inf_{u(t) \in W_0^{1,p}(\Omega) / \{0\}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda u(t)).$$

É bem sabido que a profundidade do poço d é uma constante estritamente positiva, conforme [Willem \(1996\)](#), Teorema 4.2, e

$$d = \inf_{u(t) \in \mathcal{N}} J(u(t)).$$

O termo de fonte induz uma energia potencial no sistema que atua em oposição ao efeito do mecanismo estabilizador. Nesse sentido, é possível que a energia do termo de fonte desestabilize todo o sistema e produza uma explosão por um tempo finito. Para fornecer uma solução global, o conjunto de estabilidade $\mathcal{W}_1$ cria um vale ou um poço com a profundidade d , conforme [Ye \(2007\)](#), onde a energia potencial da solução nunca pode escapar.

Vamos provar que $\mathcal{W}_1$ é um conjunto invariante para energia inicial subcrítica.

Proposição 5.6.

Sejam $u_0 \in \mathcal{W}_1$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$. Seja $E(0) < d$ então $u(t) \in \mathcal{W}_1$.

Demonstração. Seja $T > 0$ o tempo máximo de existência. De (5.7) temos

$$E(t) \leq E(0) < d, \quad \forall t \in [0, T].$$

e, então,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta(t)|^2 dx + J(u(t)) < d, \quad \forall t \in [0, T],$$

isto é,

$$E(t) < d, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5.8}$$

Argumentando por contradição, supomos que existe um primeiro $t_0 \in (0, T)$ tal que $I(u(t_0)) = 0$ e $I(u(t)) > 0$ para todo $0 \leq t < t_0$, ou seja,

$$\int_{\Omega} |\nabla u(t_0)|^p dx = \int_{\Omega} |u(t_0)|^p \ln |u(t_0)| dx.$$

Da definição de $\mathcal{N}$, temos que $u(t_0) \in \mathcal{N}$, o que leva a

$$J(u(t_0)) \geq \inf_{u(t) \in \mathcal{N}} J(u(t)) = d.$$

Por definição de $E(t)$,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'(t_0)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta(t_0)|^2 dx + J(u(t_0)) \geq d, \text{ assegura que, } E(t_0) \geq d,$$

que contradiz com (5.8). Então $u(t) \in \mathcal{W}_1$, $\forall t \in [0, T)$. □

5.4 Base de Galerkin

Da imersão de Sobolev, temos

$$W_0^{\nu, q}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{\nu-k, q_k}(\Omega), \quad \frac{1}{q_k} = \frac{1}{q} - \frac{k}{n}.$$

Escolhendo $q_k = p$, $\nu - k = 1$ e $q = 2$, temos

$$\nu = 1 + \frac{n}{2} - \frac{n}{p} = 1 + \frac{n(p-2)}{2p} > 0$$

e obtemos um espaço de Hilbert $H_0^{\nu}(\Omega)$ tal que

$$H_0^{\nu}(\Omega) = W_0^{\nu, 2}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1, p}(\Omega).$$

Seja s um inteiro para o qual $s > \nu$. Temos

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1, p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1, 2(p-1)}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

De acordo com o teorema de Rellich-Kondrachov, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacto, assim também é a imersão $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Da teoria espectral, existe um operador definido por

$$\left\{ H_0^s(\Omega), L^2(\Omega), ((\cdot, \cdot))_{H_0^s(\Omega)} \right\}$$

e uma sequência de autovetores $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ deste operador, tal que

$$((v_j, v))_{H_0^s(\Omega)} = \lambda_j (v_j, v), \quad \forall v \in H_0^s(\Omega)$$

com $\lambda_j > 0$, $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$ e $\lambda_j \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow +\infty$. Além disso, $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$ e $\left(w_j = \frac{v_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right)_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^s(\Omega)$. Então $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ produz uma “base de Galerkin” para $W_0^{1, p}(\Omega)$ e para $L^2(\Omega)$.

5.5 Solução Global

Teorema 5.7.

Considere $E(0) < d$. Dados $u_0 \in \mathcal{W}_1$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ e $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$, existem funções $u, \theta: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ nas classes

$$u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

tais que, para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}(u'', \phi) + \langle -\Delta_p u, \phi \rangle_p + \alpha(u', \phi) + (\theta, \phi) = (|u|^{p-2} u \ln |u|, \phi) \text{ em } D'(0, T), \quad (5.9)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta, \psi) + (-\Delta \theta, \psi) = (u', \psi) \text{ em } D'(0, T), \quad (5.10)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{q.s. em } \Omega. \quad (5.11)$$

Demonstração. Vamos usar a base de Galerkin obtida anteriormente. Para cada $m \in \mathbb{N}$, vamos colocar $V_m = \text{Span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Buscamos funções

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m f_{jm}(t) w_j, \quad \theta_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j,$$

tais que algum $\phi, \psi \in V_m$, $u_m(t)$ e $\theta_m(t)$ satisfaz o seguinte problema aproximado

$$\frac{d}{dt}(u'_m(t), \phi) + \langle -\Delta_p u_m(t), \phi \rangle_p + (\theta_m(t), \phi) + \alpha(u'_m(t), \phi) = (|u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)|, \phi), \quad (5.12)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta_m(t), \psi) + (-\Delta \theta_m(t), \psi) = (u'_m(t), \psi), \quad (5.13)$$

com as condições iniciais $u_m(0) = u_{0m}$, $u'_m(0) = u_{1m}$ e $\theta_m(0) = \theta_{0m}$, em que u_{0m} , u_{1m} e θ_{0m} são escolhidos para que

$$u_{0m} \rightarrow u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \theta_{0m} \rightarrow \theta_0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (5.14)$$

Colocando $\phi = w_i$, $\psi = w_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, e usando

$$\begin{aligned} u''_m(t) &= \sum_{j=1}^m f''_{jm}(t) w_j(x), & \Delta_p u_m(t) &= \sum_{j=1}^m f_{jm}(t) \Delta_p w_j(x), \\ \theta'_m(t) &= \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t) w_j(x), & \Delta \theta_m(t) &= \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \Delta w_j(x), \end{aligned}$$

observamos que (5.12)–(5.13) leva a um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável t tal que possui solução local $u_m(t), \theta_m(t)$ no intervalo $[0, t_m)$, devido ao teorema de Carathéodory. No próximo passo obtemos estimativas a priori para a solução $u_m(t), \theta_m(t)$ de forma que possam ser estendidas a todo o intervalo $[0, T]$, $T > 0$.

Estimativas a Priori: Substituindo $\phi = u'_m(t)$, $\psi = \theta_m(t)$ na equação de aproximação (5.12), (5.13) temos

$$\begin{aligned} (u''_m(t), u'_m(t)) + \langle -\Delta_p u_m(t), u'_m(t) \rangle_p + (\theta_m(t), u'_m(t)) \\ + \alpha(u'_m(t), u'_m(t)) = (|u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)|, u'_m(t)), \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$(\theta'_m(t), \theta_m(t)) + (-\Delta \theta_m(t), \theta_m(t)) = (u'_m(t), \theta_m(t)), \quad (5.16)$$

Seja $z \in D(0, t_m)$. Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualdade entre D' e D . Temos, então

$$\langle (u''_m(t), u'_m(t)), z \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m(t)|^2 dx, z \right\rangle, \quad (5.17)$$

$$\langle \langle -\Delta_p u_m(t), u'_m(t) \rangle_p, z \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^p dx, z \right\rangle, \quad (5.18)$$

$$\langle (u'_m(t), u'_m(t)), z \rangle = \left\langle \int_{\Omega} |u'_m(t)|^2 dx, z \right\rangle, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \langle (|u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln u_m(t), u'_m(t)), z \rangle &= \left\langle \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p \ln u_m(t) dx, z \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \frac{1}{p^2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dx, z \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\langle (\theta'_m(t), \theta_m(t)), z \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(t)|^2 dx, z \right\rangle, \quad (5.21)$$

$$\langle (-\Delta \theta_m(t), \theta_m(t)), z \rangle = \left\langle \int_{\Omega} |\nabla \theta_m(t)|^2 dx, z \right\rangle. \quad (5.22)$$

Substituindo (5.17), (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22) em (5.15) e (5.16) obtemos em $D'(0, t_m)$

$$\frac{d}{dt} E_m(t) = - \int_{\Omega} |\nabla \theta_m(t)|^2 dx - \int_{\Omega} |u'_m(t)|^2 dx, \quad (5.23)$$

de onde segue que a energia aproximada

$$\begin{aligned} E_m(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m(t)|^2 dx + \frac{1}{p^2} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(t)|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p \ln |u_m(t)| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m(t)|^2 dx + \frac{1}{p^2} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(t)|^2 dx + J(u(t)) \end{aligned}$$

satisfaz

$$E_m(t) \leq E_m(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m(0)|^2 dx + \frac{1}{p^2} \int_{\Omega} |u_m(0)|^p dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(0)|^2 dx + J(u_m(0)).$$

Temos que $J(u_m(0)) < d$ em $\mathcal{W}_1$. Por convergência de dados iniciais (5.14), existe uma constante $C > 0$ independente de t e m tal que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m(0)|^2 dx + \frac{1}{p^2} \int_{\Omega} |u_m(0)|^p dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\theta_m(0)|^2 dx \leq C.$$

Com a estimativa $E_m(t) \leq E_m(0) \leq C$ podemos estender as soluções aproximadas $u_m(t)$, $\theta_m(t)$ para o intervalo $[0, T]$, $T > 0$. Usando (5.23) deduzimos

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \theta_m(t)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |u'_m(t)|^2 dx dt \leq \quad (5.24)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \theta_m(t)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |u'_m(t)|^2 dx dt + E_m(t) \leq E_m(0) \leq C. \quad (5.25)$$

Para provar que (5.4)–(5.6) carregando uma boa estrutura de energia em $\mathcal{W}_1$, precisamos mostrar que o termo de força é $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)| \right|^2 dx &= \int_{\{x \in \Omega : |u_m(t)(x)| \leq 1\}} \left| |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)| \right|^2 dx \\ &+ \int_{\{x \in \Omega : |u_m(t)(x)| > 1\}} \left| |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)| \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Temos

$$\int_{\{x \in \Omega : |u_m(t)(x)| \leq 1\}} \left| |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)| \right|^2 dx \leq |\Omega|. \quad (5.26)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \Omega : |u_m(t)(x)| > 1\}} \left| |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)| \right|^2 dx &= \int_{\{x \in \Omega : |u_m(t)(x)| > 1\}} |u_m(t)|^{2p-4} |u_m(t)|^2 |\ln |u_m(t)||^2 dx \\ &\leq \int_{\{x \in \Omega : |u_m(t)(x)| > 1\}} |u_m(t)|^{2p-4} |u_m(t)|^4 |\ln |u_m(t)||^2 dx \\ &= \int_{\{x \in \Omega : |u_m(t)(x)| > 1\}} |u_m(t)|^{2p} |\ln |u_m(t)||^2 dx \\ &= \int_{\{x \in \Omega : |u_m(t)(x)| > 1\}} \left| |u_m(t)|^p \ln |u_m(t)| \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Levando em consideração que $u_m(t) \in \mathcal{W}_1$ obtemos

$$\int_{\{x \in \Omega : |u_m(t)(x)| > 1\}} \left| |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)| \right|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx. \quad (5.27)$$

De (5.26) e (5.27) temos

$$\int_{\Omega} \left| |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)| \right|^2 dx \leq |\Omega| + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \leq C. \quad (5.28)$$

Então, temos

$$u_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (5.29)$$

$$u'_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.30)$$

$$|u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)| \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.31)$$

$$-\Delta_p u_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad (5.32)$$

$$\theta_m(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.33)$$

$$-\Delta \theta_m(t) \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.34)$$

Como nossa base de Galerkin foi tomada no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, podemos usar argumentos de projeção, conforme descritos LIONS (1969), páginas 75-76, para obter uma estimativa para $u''_m(t)$.

Seja P_m a projeção ortogonal $P_m: L^2(\Omega) \rightarrow V_m$, ou seja

$$P_m h = \sum_{n=1}^m (h, w_j) w_j, \quad h \in L^2(\Omega).$$

O problema aproximado (5.15) leva a

$$u_m''(t) = P_m \Delta_p u_m(t) - P_m \theta_m(t) - P_m \alpha u_m'(t) + P_m |u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln |u_m(t)|.$$

Como $-\Delta_p u_m(t) \in L^2(0, T; (W^{-1,p'}(\Omega)))$, das estimativas (5.31), (5.33) obtemos

$$u_m''(t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)). \quad (5.35)$$

Passagem do Limite: De (5.29)–(5.35) indo para a subsequência adequada se necessário (que continuamos a denotar da mesma maneira), existem $u(t)$, $\theta(t)$ de tal forma que

$$u_m(t) \xrightarrow{*} u(t) \text{ em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (5.36)$$

$$u_m'(t) \xrightarrow{*} u'(t) \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.37)$$

$$u_m'(t) \rightharpoonup u'(t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.38)$$

$$-\Delta_p u_m(t) \xrightarrow{*} \mathcal{X}_1(t) \text{ em } L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad (5.39)$$

$$|u_m(t)|^{p-2} u_m(t) \ln u_m(t) \rightharpoonup \mathcal{X}_2(t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.40)$$

$$\theta_m(t) \rightharpoonup \theta(t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.41)$$

$$-\Delta \theta_m(t) \xrightarrow{*} -\Delta \theta(t) \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.42)$$

Aplicando o lema de compacidade Lions-Aubin, de (5.35), (5.36) e (5.37), temos

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ e q.s. em } Q, \quad (5.43)$$

$$u_m'(t) \rightarrow u'(t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ e q.s. em } Q. \quad (5.44)$$

Precisamos provar que $\mathcal{X}_1(t) = -\Delta_p u(t)$. A seguinte desigualdade elementar

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leq C(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x - y| \quad (5.45)$$

é consequência do teorema do valor médio. Usando (5.45) e a desigualdade generalizada de Hölder, com

$$\frac{p-2}{2(p-1)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(p-1)} = 1,$$

deduzimos, para $z \in \mathcal{D}(0, T)$ e $v \in V_m$, que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \langle (-\Delta_p u_m(t)) - (-\Delta_p u(t)), v \rangle z(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_m(t)|^{p-2} \nabla u_m(t) - |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t)) \nabla v dx z(t) dt \right| \\ &\leq C|\theta|_\infty \int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_m(t)|^{p-2} + |\nabla u(t)|^{p-2}) |\nabla u_m(t) - \nabla u(t)| |\nabla v| dx dt \\ &\leq C_1 \int_0^T \left(\|\nabla u_m(t)\|_{2(p-1)}^{p-2} + \|\nabla u(t)\|_{2(p-1)}^{p-2} \right) \|\nabla u_m(t) - \nabla u(t)\| \|\nabla v\|_{2(p-1)} dt, \end{aligned}$$

que leva a

$$\left| \int_0^T \langle (-\Delta_p u_m(t)) - (-\Delta_p u(t)), v \rangle_p z(t) dt \right| \leq C \int_0^T |\nabla u_m(t) - \nabla u(t)| dt. \quad (5.46)$$

Agora, de (5.36) e (5.37), pelo Lema 5.1 temos

$$u_m \rightarrow u \text{ em } C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

de onde

$$\nabla u_m(t) \rightarrow \nabla u(t) \text{ q.s. em } [0, T].$$

Portanto, por (5.39) e (5.46) temos $\mathcal{X}_1(t) = -\Delta_p u$, isto é

$$-\Delta_p u_m(t) \rightarrow -\Delta_p u(t) \text{ em } L^2(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)), \quad (5.47)$$

Agora, vamos provar que $\mathcal{X}_2(t) = |u(t)|^{p-2}u(t) \ln u(t)$. De (5.28) temos

$$|u_m|^{p-2}u_m \ln |u_m| \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q). \quad (5.48)$$

Usando continuidade de funções, $s \rightarrow |s|^{p-2}s \ln |s|$ e (5.43) temos

$$|u_m|^{p-2}u_m \ln |u_m| \rightarrow |u|^{p-2}u \ln |u| \text{ q.s. em } Q. \quad (5.49)$$

Então, usando o Lema de Lions, (5.48) e (5.49) leva a

$$|u_m|^{p-2}u_m \ln |u_m| \rightarrow |u|^{p-2}u \ln |u| \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.50)$$

Agora, com as convergências (5.37), (5.47), (5.50), (5.41) e (5.42) podemos passar ao limite no sistema aproximado e obter (5.9), (5.10). A verificação dos dados iniciais é um procedimento de rotina. A prova da existência está completa. $\square$

5.6 Decaimento Polinomial para $E(0) < d$

Provaremos que $\|u\|_p^p$ decai polinomialmente para nível subcrítico de energia inicial.

Teorema 5.8.

Seja u_0 no conjunto de estabilidade $\mathcal{W}_1$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$. Se $E(0) < d$ então a solução fraca $u(t)$ do problema (5.3)–(5.6) decai polinomialmente, isto é,

$$\|u(t)\|_p^p \leq \|u(0)\|_p^p \left[\frac{1+\sigma}{1+\omega t} \right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

em que $\sigma > \frac{1}{2}$, $\omega = \frac{\|u(0)\|_p^{p\sigma}}{C}$, $C > 0$.

Demonstração. Como $\ln |u| \leq |u|$, temos

$$\int_{\Omega} |u|^p \ln |u| \, dx \leq \int_{\Omega} |u|^{p+1} \, dx = \|u\|_{p+1}^{p+1}.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \|u\|_p^{v(p+1)} \|u\|_q^{(1-v)(p+1)}, \quad v \in (0, 1).$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \frac{\varepsilon}{p} \|u\|_p^{v(p+1)p} + \frac{C_0(\varepsilon)}{q} \|u\|_q^{q(1-v)(p+1)}$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q < p$ e, então

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \frac{\varepsilon}{p} \|u\|_p^{v(p+1)p} + C(\varepsilon) \|u\|_q^{q(1-v)(p+1)}.$$

Para $v = \frac{1}{2}$, temos

$$\int_{\Omega} |u|^p \ln |u| dx \leq \|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \frac{\varepsilon}{p} \|u\|_p^{\frac{p+1}{2}p} + C(\varepsilon) \|u\|_q^{\frac{p+1}{2}q}. \quad (5.51)$$

Definimos

$$L(t) = N \|u\|_r^{[\frac{p+1}{2}]q} + \|\nabla u\|_p^p - \int_{\Omega} |u|^p \ln |u| dx. \quad (5.52)$$

Como $u \in W_1$ temos $L(t) > 0$. Usando (5.51) e a desigualdade de Poincaré em (5.52), obtemos

$$\begin{aligned} L(t) &\geq N \|u\|_q^{[\frac{p+1}{2}]q} + C_p \|u\|_p^p - \|u\|_{p+1}^{p+1} \\ &\geq N \|u\|_q^{\frac{p+1}{2}q} + C_p \|u\|_p^p - \frac{\varepsilon}{p} \|u\|_p^{\frac{p+1}{2}p} - C(\varepsilon) \|u\|_p^{\frac{p+1}{2}q} \\ &\geq (N - C(\varepsilon)) \|u\|_q^{\frac{p+1}{2}q} + \|u\|_p^p \left(C_p - \frac{\varepsilon}{p} \right) \|u\|_p^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned}$$

Escolhendo $N, \varepsilon > 0$ tais que $C_p - \frac{\varepsilon}{p} > C > 0$ e $N - C(\varepsilon) > 0$ temos

$$L(t) \geq C [\|u\|_p^p]^{\frac{p+1}{2}}.$$

Como $p > 2$,

$$\frac{p+1}{2} = \frac{p}{2} + \frac{1}{2} = \frac{p}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{p}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \sigma + 1, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Então

$$\|u\|_p^{p[\frac{p+1}{2}]} = [\|u\|_p^p]^{\sigma+1}, \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

e obtemos

$$L(t) \geq C [\|u\|_p^p]^{\sigma+1}, \quad \sigma > \frac{1}{2}. \quad (5.53)$$

Por outro lado

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p \leq p^2 \frac{d}{dt} E(t) \leq 0,$$

isto é, $\|u(t)\|_p^p$ é uma função não crescente. Então $-\frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p \geq 0$. Para cada $\infty > T > S \geq 0$, seja $t > 0$ tal que $t \in (S, T)$ e definir

$$A = \left\{ t \in (S, T) ; -\frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p > L(t) \right\}.$$

Se $t \in (S, T)$ satisfizer

$$-\frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p \leq L(t)$$

considere $0 < \eta(t) < \infty$ tal que

$$-\frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p \eta(t) \geq L(t),$$

e considere

$$\bar{A} = \left\{ t \in (S, T); -\frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p \eta(t) \geq L(t) \right\}.$$

Seja

$$\eta = \sup \left\{ \eta(t); s \in \bar{A}, 0 < \eta(t) < \infty \right\}.$$

Então $0 < \eta < \infty$ e

$$\begin{aligned} \int_S^T L(t) dt &= \int_A L(t) dt + \int_{\bar{A}} L(t) dt \leq (1 + \eta) \int_S^T -\frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p dt \\ &\leq (1 + \eta) \|u(S)\|_p^p, \quad \forall S \geq 0. \end{aligned} \tag{5.54}$$

De (5.53) e (5.54)

$$\int_S^T [\|u(t)\|_p^p]^{\sigma+1} dt \leq C^{-1} \int_S^T L(t) dt \leq C^{-1} (1 + \eta) \|u(S)\|_p^p \leq \frac{1}{\omega} [\|u(0)\|_p^p]^\sigma \|u(S)\|_p^p$$

em que $\omega = \frac{[\|u(0)\|_p^p]^\sigma}{C^{-1}(1 + \eta)}$.

Do Lema 5.4, com $E(t) = \|u(t)\|_p^p$ e $\phi(t) = t$, obtemos

$$\|u(t)\|_p^p \leq \|u(0)\|_p^p \left[\frac{1 + \sigma}{1 + \omega t} \right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

em que $\sigma > \frac{1}{2}$, $\omega > 0$, $C > 0$. □

5.7 Blow-up em tempo finito

Como na Seção 5.3 podemos provar que $\mathcal{W}_2$ é invariante para energia inicial sub-crítica, isto é,

Proposição 5.9.

Seja $u_0 \in \mathcal{W}_2$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$. Se $E(0) < d$ então, $u(t) \in \mathcal{W}_2$.

Teorema 5.10.

Sejam u_0 no conjunto de instabilidade $\mathcal{W}_2$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $r > 1$ um número real fixado. Se $\|u_0\|_2^2 < \sqrt{r-1}(u_0, u_1)$ e $E(0) < d$ então a solução fraca $u(t)$ do problema (5.3)–(5.6) vai explodir em um tempo finito. Ou seja, o tempo máximo de existência $T < \infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow T_-} \|u(t)\|_p^p = +\infty,$$

em que

$$T < \frac{1}{\sqrt{r-1}} \ln \left[\frac{(r-1)(u_0, u_1) + \sqrt{r-1} \|u_0\|_2^2}{(r-1)(u_0, u_1) - \sqrt{r-1} \|u_0\|_2^2} \right].$$

Demonstração. Por contradição, suponha que a solução $u(t) \in \mathcal{W}_2$ é global. Isto é, temos $T = \infty$. Seja $\phi(t) = |u(t)|^2$, daí $\phi'(t) = 2(u(t), u'(t))$. Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$2(u(t), u'(t)) \leq 2|u(t)||u'(t)|$$

e

$$[\phi'(t)]^2 \leq 4|u(t)|^2 |u'(t)|^2$$

que leva a

$$[\phi'(t)]^2 \leq 4\phi(t)|u'(t)|^2. \quad (5.55)$$

Temos

$$(u''(t), u(t)) = -\|\nabla u(t)\|_p^p - \int_{\Omega} u(t)\theta(t) \, dx - \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \int_{\Omega} |u(t)|^p \ln |u(t)| \, dx.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= 2|u'(t)|^2 + 2(u''(t), u(t)) \\ &= 2|u'(t)|^2 - 2\|\nabla u(t)\|_p^p - 2 \int_{\Omega} u(t)\theta(t) \, dx - \alpha \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + 2 \int_{\Omega} |u(t)|^p \ln |u(t)| \, dx. \end{aligned}$$

Usando

$$I(u(t)) = \|\nabla u(t)\|_p^p - \int_{\Omega} |u(t)|^p \ln |u(t)| \, dx$$

temos

$$\phi''(t) = 2|u'(t)|^2 - 2I(u(t)) - 2 \int_{\Omega} u(t)\theta(t) \, dx - \alpha \frac{d}{dt} |u(t)|^2.$$

Usando (5.55) obtemos

$$\begin{aligned} \phi(t)\phi''(t) - \frac{r+3}{4}(\phi'(t))^2 &\geq \phi(t) \left(2|u'(t)|^2 - 2I(u(t)) - 2 \int_{\Omega} u(t)\theta(t) \, dx \right) \\ &\quad - \alpha\phi(t) \frac{d}{dt} |u(t)|^2 - (r+3)\phi(t)|u'(t)|^2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \phi(t)\phi''(t) - \frac{r+3}{4}(\phi'(t))^2 &\geq \phi(t) \left[-(r+1)|u'(t)|^2 - 2I(u(t)) - |u(t)|^2 - |\theta(t)|^2 \right] \\ &\quad - \alpha\phi(t) \frac{d}{dt} |u(t)|^2. \end{aligned} \quad (5.56)$$

De,

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + J(u(t)).$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u'(t)|^2 &= -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + E(t) - J(u(t)) \leq -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + E(0) - J(u(t)) \\ &\leq -\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + d - J(u(t)). \end{aligned}$$

Então,

$$-(r+1)|u'(t)|^2 \geq (r+1)|\theta(t)|^2 + 2(r+1)(J(u(t)) - d). \quad (5.57)$$

Usando (5.57) em (5.56), obtemos

$$\begin{aligned} \phi(t)\phi''(t) - \frac{r+3}{4}(\phi'(t))^2 &\geq \phi(t)[(r+1)|\theta(t)|^2 - |\theta(t)|^2] + \phi(t)[2(r+1)(J(u(t)) - d)] \\ &\quad + \phi(t)[-2I(u(t))] - \alpha\phi(t)\frac{d}{dt}|u(t)|^2 - \phi(t)|u(t)|^2. \end{aligned}$$

Agora, observe que $[(r+1)|\theta(t)|^2 - |\theta(t)|^2] > 0$, $-2I(u(t)) > 0$ em $\mathcal{W}_2$, e $J(u(t)) - d > 0$ pois

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

Temos,

$$\phi(t)\phi''(t) - (1+\gamma)(\phi(t))^2 \geq -2c_1\phi(t)\phi'(t) - c_2(\phi(t))^2,$$

em que $c_1 = \frac{\alpha}{2}$, $c_2 = 1$, $\gamma = \frac{r-1}{4}$. Por $\sqrt{r-1}(u_0, u_1) > |u_0|^2$, $c_1 + c_2 > 0$, $\phi(0) > 0$ temos $\phi'(0) + \gamma_2\gamma^{-1}\phi(0) > 0$, para $\gamma_1 = \frac{\sqrt{r-1}}{2}$ e $\gamma_2 = -\frac{\sqrt{r-1}}{2}$.

Finalmente, do Lema 5.5 concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow T_-} \|u(t)\|_p^p \geq c \lim_{t \rightarrow T_-} |u(t)|^2 = +\infty,$$

em que

$$T < \frac{1}{\sqrt{r-1}} \ln \left[\frac{(r-1)(u_0, u_1) + \sqrt{r-1}|u_0|^2}{(r-1)(u_0, u_1) - \sqrt{r-1}|u_0|^2} \right],$$

que contradiz $T = \infty$. Então, $u(t)$ explode em tempo finito. □

Referências

- AASSILA, M. Strong asymptotic stability of a compactly coupled system of wave equations. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier Science, v. 14, n. 3, p. 285–290, 2001. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(00\)00150-6](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(00)00150-6).
- ABDULLA, U. G.; JELI, R. Evolution of interfaces for the non-linear parabolic p -laplacian type reaction–diffusion equations. *European Journal of Applied Mathematics*, Cambridge University Press, v. 28, n. 5, p. 827–853, 2017.
- ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1997.
- ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*. 2^a ed. New York: Academic Press, 2003.
- ALABAU, F. Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, Elsevier, v. 328, n. 11, p. 1015–1020, 1999. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0764-4442\(99\)80316-4](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(99)80316-4).
- ALMEIDA, R. G. C.; SANTOS, M. L. Lack of exponential decay of a coupled system of wave equations with memory. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 1023–1032, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.08.025>.
- ALVES, M. S. et al. Uniform stabilization for the transmission problem of the timoshenko system with memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 369, n. 1, p. 323–345, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.02.045>.
- AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of functional Analysis*, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 349–381, 1973. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(73\)90051-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7).
- ANG, D. D.; DINH, A. P. N. Strong solutions of a quasilinear wave equation with nonlinear damping. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 19, n. 2, p. 337–347, 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0519024>.
- AUBIN, J. Un théorème de compacité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 256, p. 5042–5044, 1963. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4006n/f1164.item.r=zoom>.
- BARBU, V.; LASIECKA, I.; RAMMAHA, M. On nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 357, n. 7, p. 2571–2611, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-05-03880-8>.
- BARROW, J. D.; PARSONS, P. Inflationary models with logarithmic potentials. *Physical Review D*, APS, v. 52, n. 10, p. 5576, 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.5576>.
- BASTOS, W.; SPEZAMIGLIO, A.; RAPOSO, C. On exact boundary controllability for linearly coupled wave equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 381, n. 2, p. 557–564, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.02.074>.

- BENAISSA, A.; MOKEDDEM, S. Decay estimates for the wave equation of p -laplacian type with dissipation of m -laplacian type. *Mathematical methods in the applied sciences*, Wiley Online Library, v. 30, p. 237–247, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/mma.789>>.
- BOCIU, L.; LASIECKA, I. Uniqueness of weak solutions for the semilinear wave equations with supercritical boundary/interior sources and damping. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, American Institute of Mathematical Sciences, v. 22, n. 4, p. 835–860, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.3934/dcds.2008.22.835>>.
- BOUDJERIOU, T. Stability of solutions for a parabolic problem involving fractional p -laplacian with logarithmic nonlinearity. *arXiv preprint arXiv:2006.11178*, 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2006.11178>>.
- BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer, 2010.
- CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. *Introdução às Equações Diferenciais Parciais*. Maringá: UEM, 2010.
- CHEN, W. Cauchy problem for thermoelastic plate equations with different damping mechanisms. *arXiv preprint arXiv:1901.01423*, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/cms.2020.v18.n2.a7>>.
- CHOI, H.; KIM, H.; LAFOREST, M. Relaxation model for the p -laplacian problem with stiffness. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 344, p. 173–189, 2018. ISSN 0377-0427.
- CHUESHOV, I.; LASIECKA, I. Existence, uniqueness of weak solution and global attractors for a class of nonlinear $2d$ kirchhoff-boussinesq models. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, v. 15, n. 3, p. 777–809, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.3934/dcds.2006.15.777>>.
- CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: McGraw-Hill Inc., 1955.
- COFFMAN, C. V. Lyusternik-schnirelman theory and eigenvalue problems for monotone potential operators. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 14, n. 3, p. 237–252, 1973. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-1236\(73\)90070-0](https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90070-0)>.
- DAFERMOS, C. M. On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer, v. 29, n. 4, p. 241–271, 1968. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00276727>>.
- D'ANCONA, P.; SPAGNOLO, S. On the life span of the analytic solutions to quasilinear weakly hyperbolic equations. *Indiana University Mathematics Journal*, JSTOR, v. 40, n. 1, p. 71–99, 1991. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/24896259>>.
- DING, H.; ZHOU, J. Global existence and blow-up for a thermoelastic system with p -laplacian. *Appl. Anal.*, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00036811.2021.1941906>>.
- DOMOKOS, A.; MANFREDI, J. J. A second order differentiability technique of bojarski-iwaniec in the heisenberg group. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, Adam Mickiewicz University, Faculty of Mathematics and Computer Science, v. 40, n. 1, p. 69–74, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.7169/facm/1238418798>>.
- DREHER, M. The wave equation for the p -laplacian. *Hokkaido mathematical journal*, Hokkaido University, Department of Mathematics, v. 36, n. 1, p. 21–52, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.14492/hokmj/1285766660>>.

- ENQVIST, K.; MCDONALD, J. Q-balls and baryogenesis in the mssm. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 425, n. 3-4, p. 309–321, 1998. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(98\)00271-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00271-8)>.
- FABIAN, M. et al. *Banach space theory: the basis for linear and nonlinear analysis*. Springer Science & Business Media, 2011. (CMS Books in Mathematics, 1). Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7>>.
- FAEDO, S. Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, Scuola normale superiore, Ser. 3, 1, n. 1-4, p. 1–41, 1949. Disponível em: <http://www.numdam.org/item/ASNSP_1949_3_1_1-4_1_0/>.
- FAREH, A.; MESSAOUDI, S. A. Energy decay for a porous thermoelastic system with thermoelasticity of second sound and with a non-necessary positive definite energy. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 293, p. 493–507, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.08.040>>.
- FENG, B. On a thermoelastic laminated timoshenko beam: well posedness and stability. *Complexity*, Hindawi, v. 2020, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2020/5139419>>.
- GALERKIN, B. G. Barras e placas. as séries em algumas questões de equilíbrio de barras e placas, notícias dos engenheiros, vol. 1,(1915), 897-908). Russo: *Sterzhni i plastinki. Riady v nekotorykh voprosah uprugogo ravnovesia sterzhnei i plastinok*, *Vestnik Ingenerov*, v. 1, p. 897–908, 1915.
- GAO, H.; MA, T. F. Global solutions for a nonlinear wave equation with the p -laplacian operator. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, v. 1999, n. 11, p. 1–13, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.14232/ejqtde.1999.1.11>>.
- GEORGIEV, V.; TODOROVA, G. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of differential equations*, Elsevier, v. 109, n. 2, p. 295–308, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1051>>.
- GIORGI, C.; RIVERA, J. E. M. n. Global attractors for a semilinear hyperbolic equation in viscoelasticity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 260, p. 83–99, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7437>>.
- GLASSEY, R. T. Blow-up theorems for nonlinear wave equations. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 132, p. 183–203, 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01213863>>.
- GÓRKA, P. Logarithmic klein-gordon equation. *Acta Physica Polonica B*, v. 40, n. 1, 2009. Disponível em: <<https://inspirehep.net/files/b66a4efc868dfbf6862f227ec59c6445>>.
- GREENBERG, J. M.; MACCAMY, R. C.; VIZEL, V. J. On the existence, uniqueness, and stability of solution of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$. *Journal of Mathematics and Mechanics*, JSTOR, v. 17, n. 7, p. 707–728, 1968. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/24901880>>.
- GUO, Y.; RAMMAHA, M. A.; SAKUNTASATHIEN, S. Blow-up of a hyperbolic equation of viscoelasticity with supercritical nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 262, n. 3, p. 1956–1979, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.10.037>>.
- GUO, Y. et al. Hadamard well-posedness for a hyperbolic equation of viscoelasticity with supercritical sources and damping. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 257, n. 10, p. 3778–3812, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.07.009>>.
- HA, T. G.; PARK, S.-H. Blow-up phenomena for a viscoelastic wave equation with strong damping and logarithmic nonlinearity. *Advances in Difference Equations*, SpringerOpen, v. 2020, n. 1, p. 1–17, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/s13662-020-02694-x>>.

- HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Dover Publications, INC, 1997.
- HARAUX, A. Two remarks on dissipative hyperbolic problems. *Research Notes in Mathematics*, Pitman Boston, v. 122, p. 161–179, 1985.
- KAFINI, M.; MESSAOUDI, S. A.; MUSTAFA, M. I. Energy decay result in a timoshenko-type system of thermoelasticity of type iii with distributive delay. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 54, n. 10, p. 101503, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4826102>>.
- KESAVAN, S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Delhi: New Age International Limited, 1989. ISBN 81-224-0062-0.
- KIM, J. U. A boundary thin obstacle problem for a wave equation. *Communications in partial differential equations*, Taylor & Francis, v. 14, n. 8-9, p. 1011–1026, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03605308908820640>>.
- KOMORNIK, V.; RAO, B. Boundary stabilization of compactly coupled wave equations. *Asymptotic Analysis*, IOS Press, v. 14, n. 4, p. 339–359, 1997. Disponível em: <<https://content.iospress.com/articles/asymptotic-analysis/asy14-4-03>>.
- LASIECKA, I.; POKOJOVY, M.; WAN, X. Global existence and exponential stability for a nonlinear thermoelastic kirchhoff–love plate. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 38, p. 184–221, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.04.001>>.
- LEBEAU, G.; ZUAZUA, E. Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer, v. 148, n. 3, p. 179–231, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s002050050160>>.
- LEVINE, H. A. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $pu_{tt} = -au + \mathcal{F}(u)$. *Transactions of the American mathematical society*, v. 192, p. 1–21, 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1974-0344697-2>>.
- LI, Y. Global boundedness of weak solution in an attraction–repulsion chemotaxis system with p -laplacian diffusion. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 51, p. 102933, 2020. ISSN 1468-1218. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1468121818311684>>.
- LIAN, W.; XU, R. Global well-posedness of nonlinear wave equation with weak and strong damping terms and logarithmic source term. *Advances in Nonlinear Analysis*, De Gruyter, v. 9, n. 1, p. 613–632, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/anona-2020-0016>>.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 6a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000. v. 2. (Projeto Euclides, v. 2).
- LIONS, J. L. *Quelques méthodes de resolution des probléms aux limites non lineáires*. Paris: Dunod, 1969.
- LIONS, J. L. *Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes distribués*. [S.l.]: Masson, 1988.
- LOBATO, R. F. et al. Optimal polynomial decay to coupled wave equations and its numerical properties. *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi, v. 2014, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2014/897080>>.
- MA, T. F.; SORIANO, J. A. On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 37, n. 8, p. 1029–1038, 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(97\)00714-1](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(97)00714-1)>.

- MARTINEZ, P. A new method to decay rate estimates for dissipative systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, v. 4, p. 419–444, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/cocv:1999116>>.
- MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2019.
- NAJAFI, M. Study of exponential stability of coupled wave systems via distributed stabilizer. *Int. J. Math. Math. Sci.*, v. 28, p. 479–491, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/S0161171201003829>>.
- NAKAO, M. A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, v. 30, n. 4, p. 747–762, 1978. Disponível em: <<https://doi.org/10.2969/jmsj/03040747>>.
- NAKAO, M.; KUWAHARA, H. Decay estimates for some semilinear wave equations with degenerate dissipative terms. *Funkcialaj Ekvacioj*, v. 30, n. 1, p. 135–145, 1987.
- NEHARI, Z. On a class of nonlinear second-order differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 95, p. 101–123, 1960. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1993333>>.
- NEHARI, Z. Characteristic values associated with a class of nonlinear second-order differential equations. *Acta Mathematica*, v. 105, p. 141–175, 1961. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02559588>>.
- NONATO, C.; RAPOSO, C.; FENG, B. Exponential stability for a thermoelastic laminated beam with nonlinear weights and time-varying delay. *Asymptotic Analysis*, IOS Press, n. Preprint, p. 1–29, 2021. Disponível em: <<https://content.iospress.com/articles/asymptotic-analysis/asy201668>>.
- Ó, J. M. B. do. *Iniciação ao Estudo da Teoria Geométrica dos Pontos Críticos*. [S.l.], 2004. Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/jmbo/pipa/arquivos/bruno-relatorio-final-2004.pdf>>.
- PAYNE, L. E.; SATTINGER, D. H. Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. *Israel Journal of Mathematics*, Springer, v. 22, n. 3, p. 273–303, 1975. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02761595>>.
- PEI, P.; RAMMAHA, M. A.; TOUNDYKOV, D. Weak solutions and blow-up for wave equations of p -laplacian type with supercritical sources. *Journal of Mathematical Physics*, v. 56, n. 8, p. 081503, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4927688>>.
- QIN, Y.; RIVERA, J. Blow-up of solutions to the cauchy problem in nonlinear one-dimensional thermoelasticity. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 292, n. 1, p. 160–193, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.11.050>>.
- RACKE, R.; UEDA, Y. Nonlinear thermoelastic plate equations—global existence and decay rates for the cauchy problem. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 263, n. 12, p. 8138–8177, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.08.036>>.
- RAMMAHA, M.; STREI, T. Global existence and nonexistence for nonlinear wave equations with damping and source terms. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 354, n. 9, p. 3621–3637, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03034-9>>.
- RAMMAHA, M. A.; TOUNDYKOV, D.; WILSTEIN, Z. Global existence and decay of energy for a nonlinear wave equation with p -laplacian damping. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, American Institute of Mathematical Sciences, v. 32, n. 12, p. 4361–4390, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.3934/dcds.2012.32.4361>>.

- RAPOSO, C.; BASTOS, W. Energy decay for the solutions of a coupled wave system. *TEMA (São Carlos)*, v. 10, n. 2, p. 203–209, 2009. Disponível em: <<https://tema.sbmac.org.br/tema/article/view/137>>.
- RAPOSO, C.; VILLAGRAN, O.; FERREIRA, J. Rao-nakra sandwich beam with second sound. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, v. 4, p. 100053, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100053>>.
- RAPOSO, C. A.; RIBEIRO, J. O.; CATTAL, A. P. Global solution for a thermoelastic system with p -laplacian. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier, v. 86, p. 119–125, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.06.029>>.
- RIVERA, J. E. M. Energy decay rates in linear thermoelasticity. *Funkcialaj Ekvacioj*, v. 35, n. 1, p. 19–30, 1992. Disponível em: <<http://www.math.sci.kobe-u.ac.jp/HOME/fe/xml/mr1172418.xml>>.
- RIVERA, J. E. M. N. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. 1^a ed. Brasil: LNCC, 2004.
- SCHWARTZ, L. *Théorie des Distributions*. Paris: Hermann, 1966.
- SZULKIN, A.; WETH, T. The method of nehari manifold. In: *Handbook of nonconvex analysis and applications*. Boston: International Press, 2010. p. 597–632. Disponível em: <<https://staff.math.su.se/andrzej/publications/Nehari.pdf>>.
- VISHIK, M. I.; LADYZHENSKAYA, O. A. Boundary-value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, Russian Academy of Sciences, v. 11, n. 6, p. 41–97, 1956. Disponível em: <<http://mi.mathnet.ru/umn7927>>.
- WILLEM, M. *Minimax Theorems*. Birkhäuser Boston, 1996. v. 24. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 1). Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1>>.
- YE, Y. Global existence and asymptotic behavior of solutions for a class of nonlinear degenerate wave equations. *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, Hindawi, v. 2007, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2007/19685>>.
- YOSIDA, K. *Functional Analysis*. 4a. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1974. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 123).
- ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B: Nonlinear Monotone Operators*. [S.l.]: Springer Science & Business Media LCC, 1990.
- ZHIJIAN, Y. Global existence, asymptotic behavior and blowup of solutions for a class of nonlinear wave equations with dissipative term. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 187, n. 2, p. 520–540, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0022-0396\(02\)00042-6](https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00042-6)>.
- ZHIJIAN, Y. Longtime behaviour for a nonlinear wave equation arising in elasto-plastic flow. *Mathematical Methods in Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 32, n. 9, p. 1082–1104, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/mma.1080>>.
- ZLOSHCHASTIEV, K. Applications of wave equations with logarithmic nonlinearity in fluid mechanics. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 1101, p. 12–51, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1101/1/012051>>.

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística / Programa de Pós-Graduação em Matemática

Campus Universitário de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n. Salvador-BA. CEP 40.170-110

www.pgmat.ufba.br